

Д/з 11 для групп Д2-01, Д2-02, Д2-03, Д2-04

1) Найти неопределенные интегралы:

$$\int x^5 dx, \quad \int \frac{dx}{x^5}, \quad \int \sqrt[3]{x^2} dx, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x}}, \quad \int \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} dx,$$

$$\int x(x^3 - 3)^2 dx, \quad \int \frac{(x-1)^3}{x} dx, \quad \int 7! x^6 dx, \quad \int \left(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) dx.$$

Ответы: $\frac{x^6}{6} + C; \quad -\frac{1}{4x^4} + C; \quad \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C; \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} + C; \quad \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C;$
 $\frac{x^8}{8} - \frac{6x^5}{5} + \frac{9x^2}{2} + C; \quad \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 3x - \ln|x| + C; \quad 6!x^7 + C; \quad x - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + C.$

2) Вычислить по правилу Лопиталья:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - \cos 5x}{e^{3x} - \cos x} \quad \left(= \frac{7}{3} \right);$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} \quad (= 1);$

в) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \sin \alpha x}{\ln \sin \beta x} \quad (= 1);$ г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} \quad (= 0).$

3) Вычислить $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}.$ Ответ: $\frac{16a}{9}.$

(Это оригинальный пример, впервые предложенный Лопиталем в письме к Иоганну Бернулли. См. Г.Ф. де Лопиталь «Анализ бесконечно малых», глава IX, пункт 164).

4) Построить с подробным исследованием графики функций

а) $y = x^2e^{-x},$ б) $y = x^x.$

Указания:

а) $x_1 = 0$ — т. лок. мин., $x_2 = 2$ — т. лок. макс., $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{2}$ — т. перегиба.,
 $y = 0$ — г. а. при $x \rightarrow +\infty;$

б) $x_0 = 1/e$ — т. лок. мин., функция выпукла вниз, $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1.$

5) Найти все асимптоты: а) $f(x) = \frac{x(x^2 + 7x - 8)}{x^2 - 1},$ б) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}.$

Ответы: а) $x = -1$ — в. а., $y = x + 7$ — н. а.;

б) $y = 0$ — г. а. при $x \rightarrow -\infty,$ $y = 2x$ — н. а. при $x \rightarrow +\infty.$