

Д/з 3 для групп Д2-01, Д2-02, Д2-03, Д2-04

1) При помощи таблицы эквивалентностей найти степенные асимптотики для функций:

$$\text{а) } f(x) = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \text{ при } x \rightarrow 0 \quad \left(f(x) \sim \frac{x^2}{4}, \quad x \rightarrow 0 \right),$$

$$\text{б) } f(x) = 1 - \cos^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \text{ при } x \rightarrow +\infty \quad \left(f(x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow +\infty \right),$$

$$\text{в) } f(x) = \ln(5-x) \text{ при } x \rightarrow 4 \quad (f(x) \sim -(x-4), \quad x \rightarrow 4),$$

$$\text{г) } f(x) = \sqrt[3]{1+6x^2} - 1 \text{ при } x \rightarrow 0 \quad (f(x) \sim 2x^2, \quad x \rightarrow 0).$$

2) Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2\varphi}{1 - \cos 3\varphi} \quad \left(= \frac{4}{9} \right),$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{9^x - 1} \quad \left(= \frac{\ln 2}{\ln 3} \right),$$

$$\text{в) } \lim_{p \rightarrow +\infty} p [\ln(p+3) - \ln(p+1)] \quad (= 2),$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^x \quad (= e^{-4}).$$

3) С помощью «о» сравнить при $x \rightarrow 0$ величины:

$$\text{а) } f(x) = x^6 \text{ и } g(x) = x^7 \quad (g(x) = o(f(x)), \quad x \rightarrow 0),$$

$$\text{б) } f(x) = x + x^2 \text{ и } g(x) = x^2 + x^3 \quad (g(x) = o(f(x)), \quad x \rightarrow 0).$$

4) С помощью «о» сравнить при $x \rightarrow +\infty$ величины:

$$\text{а) } f(x) = 1 + x \text{ и } g(x) = x + x^2 \quad (f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow +\infty),$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{1}{x^3} \text{ и } g(x) = \frac{1}{x} \quad (f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow +\infty).$$

5) Вычислить производную y'' для функций:

$$\text{а) } y = 3x + x\sqrt{x} \quad \left(y'' = \frac{3}{4\sqrt{x}} \right),$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \quad \left(y'' = \frac{3}{(2x+1)^{5/2}} \right),$$

$$\text{в) } y = \operatorname{tg}(2x+1) \quad \left(y'' = \frac{8 \sin(2x+1)}{\cos^3(2x+1)} \right),$$

$$\text{г) } y = (\ln x)^2 \quad \left(y'' = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} \right),$$

$$\text{д) } y = e^{\sin x} \quad (y'' = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)).$$

6) Вычислить производную $y^{(10)}$ для функции $y = \frac{x^{100}}{100!}$.

Ответ: $y^{(10)} = \frac{x^{90}}{90!}$.