Д/з 6 для групп Д2–01, Д2–02, Д2–03, Д2–04

1) Составить уравнения касательных для графиков следующих функций:

а) $f(x) = 1 - x^2$ в точках $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x$ в точках $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$;

в) $f(x) = \ln(1+x)$ в точках $x_0 = 0$, $x_1 = 9$.

Ответ: а) $y = 1$, $y = 2 - 2x$, $y = 4x + 5$; б) $y = x$, $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$;
в) $y = x$, $y = 0.1x - 0.9 + \ln 10$

2) Через точки графика $y = x^2 - 4x + 3$ с абсциссами $x_1 = 2$ и $x_2 = 6$ проведена секущая. Составить уравнение касательной к этому графику так, чтобы касательная была параллельна секущей.

Ответ: $y = 4x - 13$ — касательная в точке $(4, 3)$.

3) Под каким углом пересекает график функции $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ ось абсцисс?

Ответ: $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

4) Найти все прямые, проходящие через точку $A(2, 3)$ и касающиеся графика $y = x^2$.

Ответ: $y = 2x - 1$ касается в точке $(1, 1)$, $y = 6x - 9$ касается в точке $(3, 9)$.

5) Кривая задана параметрическим уравнением $x = (1+t)^2$, $y = 2\sqrt{t}$ при $t \geqslant 0$. Найти касательный вектор к кривой в моменты времени $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 9$.

Ответ: $\vec{v}\Big|_{t_1=1} = (4,\ 1)$, $\vec{v}\Big|_{t_2=2} = \left(6,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{v}\Big|_{t_3=9} = \left(20,\ \frac{1}{3}\right)$.

6) На плоскости задана кривая $x = t^2$, $y = t^3$, $t > 0$. В какой точке кривой касательный вектор перпендикулярен вектору $\vec{a} = (3,\ -1)$? Составить уравнение касательной к кривой в этой точке.

Ответ: в точке $M_0(4, 8)$; уравнение касательной $y = 3x - 4$.

7) Точка на плоскости движется по закону $x = \cos t^2$, $y = \sin t^2$, $t \geqslant 0$. Изобразить траекторию движения точки. Найти координаты положения, в котором вектор скорости имеет единичную длину.

Ответ: $|\vec{v}\,| = 1$ при $t_0 = \frac{1}{2}$ в точке $M_0\left(\cos \frac{1}{4},\ \sin \frac{1}{4}\right)$.

8) Вычислить предел: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin \alpha x} - \sqrt{1 - \sin \alpha x}}{\operatorname{tg} \beta x}$ $\left(= \dfrac{\alpha}{\beta}\right)$.