

Д/з 7 для групп Д2–01, Д2–02, Д2–03, Д2–04

1) Записать формальный дифференциал для следующих функций:

$$\text{а) } y_1 = x^{10}, \quad y_2 = \frac{1}{x^{10}}, \quad y_3 = \operatorname{ctg} x, \quad y_4 = \frac{1}{(1-x)^3}, \quad y_5 = \ln \frac{1-x}{1+x}, \quad y_6 = \frac{n!}{x^{n+1}};$$

$$\text{б) } y_1 = uv^2, \quad y_2 = \sqrt{uv}, \quad y_3 = \frac{u}{v}, \quad y_4 = \ln(u^2 + v^2), \quad y_5 = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}.$$

Здесь u, v — заданные функции от x .

Ответы: а) $dy_1 = 10x^9 dx, \quad dy_2 = -\frac{10 dx}{x^{11}}, \quad dy_3 = -\frac{dx}{\sin^2 x}, \quad dy_4 = \frac{3 dx}{(1-x)^4}, \quad dy_5 = \frac{2 dx}{x^2 - 1},$

$$dy_6 = -\frac{(n+1)!}{x^{n+2}} dx; \quad \text{б) } dy_1 = v^2 du + 2uv dv, \quad dy_2 = \frac{v du + u dv}{2\sqrt{uv}}, \quad dy_3 = \frac{v du - u dv}{v^2},$$

$$dy_4 = \frac{2(u du + v dv)}{u^2 + v^2}, \quad dy_5 = \frac{v du - u dv}{u^2 + v^2}.$$

2) Для функции $f(x)$ записать приращение Δf в точке x_0 через дифференциал df :

$$\text{а) } f(x) = x^5 \text{ для } x_0 = 2 \quad ((2 + \Delta x)^5 - 32 = 80 \Delta x + o(\Delta x));$$

$$\text{б) } f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ для } x_0 = 3 \quad \left(\sqrt{(3 + \Delta x)^2 + 1} - \sqrt{10} = \frac{3 \Delta x}{\sqrt{10}} + o(\Delta x) \right);$$

$$\text{в) } f(x) = \operatorname{ctg} x \text{ для } x_0 = \frac{\pi}{4} \quad \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \Delta x \right) - 1 = -2 \Delta x + o(\Delta x) \right).$$

3) Вычислить приближенно и проверить по калькулятору:

$$\text{а) } \sqrt{15.2} \quad (\sqrt{15.2} \approx 4 - 0.1 = 3.9);$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{126} \quad (\sqrt[3]{126} \approx 5 + 0.01(3) = 5.01(3)).$$

4) Для функции $y = \frac{x+1}{x-1}$, найти точки на графике, где касательная перпендикулярна прямой $y = 2x$. Составить уравнения касательных в найденных точках.

Ответ: $y = \frac{1}{2}(7-x)$ в точке $M_1(3, 2)$, $y = -\frac{1}{2}(x+1)$ в точке $M_2(-1, 0)$.

5) Точка движется по закону $x = t^2, y = t^2, -\infty < t < +\infty$. Изобразить траекторию движения. Найти координаты положений, в которых абсолютная величина скорости равна 1.

Ответ: $M\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

6) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+10} \right)^x \quad (= e^{-10}).$