

Д/з 8 для групп Д2–01, Д2–02, Д2–03, Д2–04

1) Показать, что функция $y = x - \operatorname{arctg} x$ всюду возрастает.

2) Найти интервалы монотонности для функции $y = x(x - 3)^2$.

Ответ: функция возрастает на $(-\infty, 1]$ и на $[3, \infty)$; убывает на $[1, 3]$.

3) Найти интервалы монотонности для функции $y = (x + 2)^2 e^x$.

Ответ: функция возрастает на $(-\infty, -4]$ и на $[-2, \infty)$; убывает на $[-4, -2]$.

4) Найти интервалы монотонности для функции $y = (2x)^{-x}$.

Ответ: функция возрастает на $(0, \frac{1}{2e}]$; убывает на $[\frac{1}{2e}, \infty)$.

5) Найти точки экстремумов для функций: а) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}$; б) $y = \ln(x - 7) - 2x$.

Ответ: а) $x_1 = -1$ — т. лок. минимума; б) $x_1 = \frac{15}{2}$ — т. лок. максимума.

6) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^4 - x^3$ на отрезке $[0, 1]$.

Ответ: $f(0) = f(1) = 0$ — максимум функции; $f(\frac{3}{4}) = -\frac{27}{256}$ — минимум.

7) Положительное число a складывается с обратным к \sqrt{a} . При каком значении a полученная сумма будет минимальной?

Ответ: $S_{\min} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ при $a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

8) Через заданную точку $A(2, 1)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного прямой с положительными полуосями координат оказалась наименьшей.

Ответ: $y = 2 - \frac{x}{2}$; $S_{\min} = 4$ ед².

9) Фольклорная задача: установить без калькулятора, что больше e^π или π^e ?

Ответ: $e^\pi > \pi^e$.

Указание: прологарифмировать оба числа, затем ввести подходящую функцию и исследовать ее на экстремум.

10) Привести пример дифференцируемой функции, возрастающей на всей оси, у которой есть бесконечное число критических точек, но нет ни одной точки экстремума.