Занятие 11 для групп Д2–01, Д2–02, Д2–03, Д2–04
Тема 1: простейшие первообразные

Если $F'(x) = f(x)$ на интервале J, то функция $F(x)$ называется *первообразной* для $f(x)$ на J. Совокупность всех первообразных составляет *неопределенный интеграл*:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad \text{где } F'(x) = f(x), \text{ а } C \text{ — произвольная постоянная.}$$

Для степенной функции имеем

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1), \qquad\qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Задачи

1) Найти неопределенные интегралы:

$$\int x^3\,dx, \qquad \int \frac{dx}{x^3}, \qquad \int \sqrt{x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}}, \qquad \int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\int (x^2+1)^3\,dx, \qquad \int \frac{(x+1)^2}{x}\,dx, \qquad \int \frac{x^{10}}{10!}\,dx, \qquad \int \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) dx.$$

Тема 2: правило Лопиталя и его применение

Пусть a — конечное число или любой из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$. Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{вида} \quad \frac{0}{0} \quad \text{или} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Правило Лопиталя утверждает, что

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если последний предел (конечный или бесконечный) существует.

Задачи

2) Вычислить по правилу Лопиталя:

а) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$ $\quad (= -2)$; $\qquad$ б) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{5^x - 7^x}$ $\quad \left(= \frac{\ln \frac{2}{3}}{\ln \frac{5}{7}}\right)$;

в) $\displaystyle \lim_{x\to 0+} \frac{\ln \sin 7x}{\ln \sin 17x}$ $\quad (= 1)$; $\qquad$ г) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x^n e^{-x}$ $\quad (= 0)$.

3) Построить с подробным исследованием график функции $y = x\ln x$.

<u>Указание</u>: $x_0 = 1/e$ — т. лок. мин., функция выпукла вниз, $\displaystyle \lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$.

4) Найти все асимптоты: а) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3+2}$, $\qquad$ б) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

<u>Ответы</u>: а) $x = -\sqrt[3]{2}$ — в. а., $y = x$ — н. а.;

б) $y = x$ — н. а. при $x \to +\infty$, $\quad y = -x$ — н. а. при $x \to -\infty$.