Занятие 12 для групп Д2–01, Д2–02, Д2–03, Д2–04

Тема 1: тренировка на правило Лопиталя

1) Раскрыть неопределенности:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\ln x - \ln 2}$ $\quad (= 2)$; $\qquad$ б) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{\sin x}{x^2} - \dfrac{(e^x-1)^2}{x^3}\right]$ $\quad (= -1)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$ $\quad \left(= -\dfrac{e}{2}\right)$.

Тема 2: неопределенные интегралы

I. Таблица основных неопределенных интегралов (повторить).

II. Замена переменных в неопределенном интеграле:

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = \int F'(g(x))\,dg(x) = \{t = g(x)\} = \int F'(t)dt = \int dF(t) = F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

III. Формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x).$$

Задачи

2) Ключевые примеры:

$$\int (3x+5)^{10}\,dx, \quad \int \frac{x\,dx}{x^2+4}, \quad \int xe^x\,dx, \quad \int x\ln x\,dx, \quad \int \ln x\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2}, \quad \int \frac{dx}{4x^2+1}, \quad \int \frac{dx}{x^2+4}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}, \quad \int \sin\frac{x}{3}\,dx,$$

$$\int \sin x\,\cos^3 x\,dx, \quad \int \cos^2 x\,dx, \quad \int \operatorname{ctg} x\,dx, \quad \int \operatorname{ctg}^2 x\,dx,$$

$$\int x^2\,e^{-x}\,dx, \quad \int e^{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int x\operatorname{arctg} x\,dx, \quad \int (x\cos x)^2\,dx.$$

<u>Ответы</u>: $\frac{(3x+5)^{11}}{33} + C$, $\quad \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$, $\quad (x-1)e^x + C$, $\quad \frac{x^2}{4}\,(2\ln x - 1) + C$, $\quad x\ln x - x + C$, $\operatorname{arctg}(x-1) + C$, $\quad \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C$, $\quad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$, $\quad \ln\left|x + \sqrt{x^2+9}\right| + C$, $\quad -3\cos\frac{x}{3} + C$,
$-\frac{\cos^4 x}{4} + C$, $\quad \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$, $\quad \ln|\sin x| + C$, $\quad -x - \operatorname{ctg} x + C$,
$-\left(x^2+2x+2\right)\,e^{-x} + C$, $\quad 2\left(\sqrt{x}\ - 1\right)\,e^{\sqrt{x}} + C$, $\quad \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$,
$\frac{x^3}{6} + \frac{2x^2-1}{4}\sin 2x + \frac{x}{4}\cos 2x + C$.

3) Найти асимптоту линии, заданной неявным уравнением $y^3 + x^3 = 1$.

<u>Ответ</u>: $y + x = 0$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1);$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C;$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C;$

7) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, \ \ a \neq 1);$

8) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C;$

9) $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

10) $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

13) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C;$

14) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C;$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

Таблица дополнительных неопределенных интегралов

3*) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0);$

4*) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad (a \neq 0);$

5*) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad (a > 0);$

6*) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad (a \neq 0);$

17) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$