

Занятие 13 для групп Д2–01, Д2–02, Д2–03, Д2–04

Тема 1: формула Ньютона–Лейбница

I. Определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ выражает ориентированную площадь криволинейной трапеции между графиком Γ_f на отрезке $[a, b]$ и осью Ox .

II. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то справедлива формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b, \quad \text{где} \quad F(x)|_a^b \equiv F(b) - F(a).$$

1) Подробно разобрать примеры:

$$\text{а) } \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \int_0^\pi \sin x dx = 2; \quad \text{в) } \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0.$$

2) Вычислить:

$$\text{а) } \int_1^2 x^2 dx, \quad \text{б) } \int_1^{10} \frac{dx}{x}, \quad \text{в) } \int_{-2}^2 x^3 dx, \quad \text{г) } \int_{-2}^2 x^4 dx, \quad \text{д) } \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx,$$

$$\text{е) } \int_0^\pi (\sin x + \cos x)^2 dx, \quad \text{ж) } \int_{-\pi}^\pi \cos^2 x dx, \quad \text{з) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}, \quad \text{и) } \int_2^3 \frac{dx}{x^2},$$

$$\text{к) } \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Тема 2: неопределенные интегралы

3) Разобрать проблемные задачи из д/з 12.

4) Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int x(5x^2 - 1)^7 dx, \quad \text{б) } \int x(5x - 1)^7 dx, \quad \text{в) } \int (x + 1)e^{-x} dx, \quad \text{г) } \int e^x \sin x dx,$$

$$\text{д) } \int \sin 2x dx, \quad \text{е) } \int \sin^2 2x dx, \quad \text{ж) } \int \sin^3 2x dx, \quad \text{з) } \int \frac{dx}{3x^2 + 11},$$

$$\text{и) } \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 4}, \quad \text{к) } \int \frac{dx}{x^2 - 4}, \quad \text{л) } \int \frac{dx}{x^2 - 4x}, \quad \text{м) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x}},$$

$$\text{н) } \int \frac{\ln x}{x} dx, \quad \text{о) } \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx, \quad \text{п) } \int \operatorname{arctg} x dx.$$

ОТВЕТЫ:

2) а) $\frac{7}{3}$, б) $\ln 10$, в) 0 , г) $\frac{64}{5}$, д) $\frac{1}{2}$, е) π , ж) π , з) $\frac{\pi}{4}$, и) $\frac{1}{6}$, к) 2 .

4) а) $\frac{1}{80} (5x^2 - 1)^8 + C$, б) $\frac{1}{25} \left(\frac{(5x-1)^9}{9} + \frac{(5x-1)^8}{8} \right) + C$, в) $-(2+x)e^{-x} + C$,

г) $\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$, д) $-\frac{\cos 2x}{2} + C$, е) $\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + C$, ж) $\frac{\cos^3 2x}{6} - \frac{\cos 2x}{2} + C$,

з) $\frac{1}{\sqrt{33}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3}{11}} x \right) + C$, и) $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$, к) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$, л) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-4}{x} \right| + C$,

м) $\ln \left| x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x} \right| + C$, н) $\frac{\ln^2 x}{2} + C$, о) $\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$, п) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$.