

Занятие 14 для групп Д2–01, Д2–02, Д2–03, Д2–04

Тема: вычисление определенных интегралов

I. Формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) d\varphi(x) = \{t = \varphi(x)\} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt.$$

II. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

или коротко

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

Задачи

1) Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}; \quad \text{б) } \int_{-1}^3 \frac{x dx}{\sqrt{2x+3}}; \quad \text{в) } \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$\text{г) } \int_0^2 x e^{-x^2} dx; \quad \text{д) } \int_0^2 x e^{-x} dx; \quad \text{е) } \int_1^2 x \ln x dx;$$

$$\text{ж) } \int_0^1 x \ln(x^2+1) dx; \quad \text{з) } \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}; \quad \text{и) } \int_0^{\pi} (\pi-x)^2 \sin x dx.$$

2) Найти среднее значение функций на указанных отрезках:

- а) $f(x) = x^2$ на $[0, 1]$;
- б) $f(x) = \sin x$ на $[0, \pi]$ и на $[0, 2\pi]$;
- в) $f(x) = \ln x$ на $[e^{-1}, e]$.

3) Найти площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

- а) $y = 1 - x^2$ и осью Ox ;
- б) $y = \operatorname{tg} x$, осью Ox и $x = \frac{\pi}{4}$;
- в) $y = \sqrt{x+5}$, осью Ox и $x = 4$.

Ответы:

1) а) 2; б) $\frac{4}{3}$; в) $\sqrt{5} - 1$; г) $\frac{1}{2}(1 - e^{-4})$; д) $1 - 3e^{-2}$; е) $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$;

ж) $\ln 2 - \frac{1}{2}$; з) $\ln \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}$; и) $\pi^2 - 4$.

2) а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{\pi}$ и 0; в) $\frac{2}{e^2 - 1}$.

3) а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{1}{2} \ln 2$; в) 18.