

Занятие 2 для групп Д2–01, Д2–02, Д2–03, Д2–04

Тема: эквивалентность функций, степенные асимптотики

Запись $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow a$ означает, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Лемма. Пусть $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow C \neq 0$ при $x \rightarrow a$. Тогда $f(x) \sim Cg(x)$ при $x \rightarrow a$. (Доказать.)

Особо важны степенные асимптотики вида $f(x) \sim Cx^p$ при $x \rightarrow 0$ или при $x \rightarrow \infty$.

Пример. Найти степенные асимптотики для $f(x) = 5x^7 + 3x^2 + 2x$ при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \infty$.

1) Найти степенные асимптотики для следующих величин:

а) $f(x) = x^2 + 2x + 4\sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0+$,

б) $f(x) = x^2 + 2x + 4\sqrt{x}$ при $x \rightarrow +\infty$,

в) $f(x) = \frac{x}{7} + \frac{7}{x}$ при $x \rightarrow 0$,

г) $f(x) = \frac{x}{7} + \frac{7}{x} + \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2}$ при $x \rightarrow \infty$,

д) $f(x) = (x+1)^3 + (x-1)^3$ при $x \rightarrow 0$,

е) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ при $n \rightarrow +\infty$,

ж) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ при $n \rightarrow +\infty$.

2) Вычислить производную y' для функций:

$$y = x + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}, \quad y = 2^{\sqrt{1-x}}, \quad y = e^{e^x}, \quad y = \frac{1}{x^e}, \quad y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = (2x^2 - 1) \sin 2x + 2x \cos 2x, \quad y = \arcsin \sqrt{\frac{x-2}{2}}, \quad y = \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}.$$

3) Вычислить производную $y^{(n)}$ для функций:

$$y = 2^x, \quad y = 3^{-x}, \quad y = \ln x, \quad y = \frac{1}{1-x}.$$

4) С какой практической погрешностью достаточно измерить сторону квадрата a , $1 \text{ м} < a < 2 \text{ м}$, для того чтобы вычислить его площадь с точностью до 0.01 м^2 ?

Ответ: $|\Delta| < \frac{1}{400} \text{ м} = 2.5 \text{ мм}$.

5) Проверить эквивалентность:

а) $(1+x)^n - 1 \sim nx$ при $x \rightarrow 0$,

б) $\frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[x]{x} - 1} \sim \frac{n}{m}$ при $x \rightarrow 1$.