Занятие 3 для групп Д2–01, Д2–02, Д2–03, Д2–04

Тема: символ o, таблица основных эквивалентностей

I. Символ o. Запись $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ означает, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Лемма. Пусть $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Тогда $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$. (Очевидно.)

Пример. Пусть $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$. Тогда $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. (Объяснить.)

II. Таблица основных эквивалентностей. При $x \to 0$ имеем

1) $\sin x \sim x$, 2) $\operatorname{tg} x \sim x$, 3) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, 4) $\ln(1+x) \sim x$, 5) $e^x - 1 \sim x$,
6) $a^x - 1 \sim x \ln a$, 7) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

Принцип замены эквивалентных величин. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$. Тогда

$$\lim_{x\to a} \left(f(x)H(x)\right) = \lim_{x\to a} \left(g(x)H(x)\right),$$

если хотя бы один из этих пределов существует.

1) С помощью «o» сравнить при $x \to 0$ и при $x \to +\infty$ величины:

а) $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^5$; б) $f(x) = 100\sqrt{x}$ и $g(x) = 0.01x$.

2) Для функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+9} - \sqrt{x+1}}{x}$ найти степенные асимптотики при $x \to +\infty$ и при $x \to 0$.

3) При помощи таблицы эквивалентностей найти степенные асимтотики для величин:

а) $f(x) = \sin^3(2x)$ при $x \to 0$, б) $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{1}{x+1}$ при $x \to \infty$,

в) $f(x) = \ln(3 - 2x)$ при $x \to 1$, г) $f(x) = \sqrt[7]{1+3x^2} - 1$ при $x \to 0$.

4) Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin 7\theta}{\sin 4\theta}$ $\left(= \dfrac{7}{4}\right)$; б) $\lim\limits_{\varphi\to 0} \dfrac{\sin\varphi - \operatorname{tg}\varphi}{\sin^3 2\varphi}$ $\left(= -\dfrac{1}{16}\right)$;

в) $\lim\limits_{p\to+\infty} p\left[\ln(5+p) - \ln p\right]$ $(= 5)$; г) $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{3-t}{3+t}\right)^{1/t}$ $\left(= e^{-2/3}\right)$

5) Вычислить производную $x''(t)$ для функций:

$x(t) = e^t(\cos t + \sin t)$, $x(t) = \ln(\ln t)$, $y = \sqrt{5+t^2}$, $y = \arccos t$.

6) Пользуясь эквивалентностью $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ при $x \to 0$, доказать приближенную формулу

$$\sqrt{a^2+h} \approx a + \frac{h}{2a}, \qquad |h| \ll a.$$

Вычислить по формуле $\sqrt{102}$, $\sqrt{63}$. <u>Ответ</u>: $\sqrt{102} \approx 10.1$, $\sqrt{63} \approx 7.9375$
(точные значения $\sqrt{102} = 10.09950494\ldots$, $\sqrt{63} = 7.937253933\ldots$).

7) Уточнить предыдущую формулу, показав, что

$$\sqrt{a^2+h} = a + \frac{h}{2a} - r, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant r \leqslant \frac{h^2}{8a^3}.$$