Занятие 6 для групп Д2–01, Д2–02, Д2–03, Д2–04

Тема: касательная прямая и касательный вектор

I. Уравнение прямой: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Здесь $k = \operatorname{tg}\varphi$ — угловой коэффициент прямой.

II. Касательная к графику функции: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Здесь $y = f(x)$ — заданная функция, (x_0, y_0) — выбранная точка, причем $y_0 = f(x_0)$.

III. Касательный вектор к кривой: $\vec{v}(t) = (\, x'_t,\, y'_t \,) = (\, \varphi'(t),\, \psi'(t) \,)$.

Здесь $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — кривая на плоскости, t — параметр, $a \leqslant t \leqslant b$.

Важная формула: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Задачи.

1) Составить уравнение касательной для функций:

а) $f(x) = x^3$ в точках $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 10$;

б) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7}$ в точке $x_0 = 1$.

Ответ: а) $y = 0$, $y = 3x - 2$, $y = 300x - 2000$; б) $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

2) Через точки графика $y = x^2$ с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ проведена секущая. Составить уравнение касательной к этому графику так, чтобы касательная была параллельна секущей.

Ответ: $y = 2x - 1$ — касательная в точке $(1, 1)$.

3) Составить уравнение касательной для $y = x^3 - x^2$, параллельной прямой $y = 8x$.

Ответ: $y = 8x - 12$ в точке $(2, 4)$, $y = 8x + \frac{176}{27}$ в точке $(-\frac{4}{3}, -\frac{112}{27})$.

4) Составить уравнение касательной для $y = \dfrac{x+3}{x-1}$, образующей угол $135°$ с осью Ox.

Ответ: $y = -x + 6$ в точке $(3, 3)$, $y = -x - 2$ в точке $(-1, -1)$.

5) Найти углы, под которыми пересекает ось абсцисс график функции $y = x^2 + 3x + 2$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$.

6) На плоскости задана кривая $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $-\infty < t < \infty$. Найти касательный вектор к кривой в момент $t = \ln 2$. Составить уравнение касательной в этой точке.

Ответ: $\vec{v} = (\, 2, -\frac{1}{2})$ — касательный вектор; $y = 1 - \frac{x}{4}$ — уравнение касательной.

7) На плоскости задана кривая $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Составить уравнение касательной в момент $t = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $y = \sqrt{2} - \frac{x}{2}$.

8) Показать, что отрезок касательной к гиперболе $y = \dfrac{a}{x}$, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

Указание: $x_0\, y + y_0\, x = 2a$ — уравнение касательной в точке (x_0, y_0), $x_0 y_0 = a$.