Занятие 7 для групп Д2–01, Д2–02, Д2–03, Д2–04

Тема: дифференциал

Приращение Δf дифференцируемой функции $y = f(x)$ представимо в виде:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Главная линейная часть приращения называется *дифференциалом* и обозначается

$$dy = df = df(x_0; \Delta x) \equiv f'(x_0)\Delta x.$$

Формальный дифференциал: $\boxed{df(x) = f'(x)dx,}$ где dx — аналог Δx.

Задачи

1) Записать формальный дифференциал для следующих функций:

а) $y = \cos x, \quad y = \dfrac{1}{x}, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = \dfrac{1}{1-x}, \quad y = \dfrac{x^n}{n!};$

б) $y = uv, \quad y = uvw, \quad y = \dfrac{1}{u^2}, \quad y = u^2 + v^2, \quad y = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$

Здесь u, v, w — заданные функции от x.

2) Для функции $f(x)$ записать приращение Δf в точке x_0 через дифференциал df:

а) $f(x) = \ln x$ $\quad \left(\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0 = \dfrac{\Delta x}{x_0} + o(\Delta x)\right);$

б) $f(x) = \operatorname{tg} x$ $\quad \left(\operatorname{tg}(x_0 + \Delta x) - \operatorname{tg} x_0 = \dfrac{\Delta x}{\cos^2 x_0} + o(\Delta x)\right);$

в) $f(x) = \sin x$ для $x_0 = \frac{5\pi}{6}$ $\quad \left(\sin\left(\dfrac{5\pi}{6} + \Delta x\right) - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Delta x + o(\Delta x)\right).$

3) Вычислить приближенно: а) $\sqrt{9.1}$, б) $\sqrt{80}$, в) $\operatorname{arctg} 1.05$.

а) $\sqrt{9.1} \approx 3 + 0.01(6) = 3.01(6)$ (точное значение $3.0166206\ldots$);

б) $\sqrt{80} \approx 9 - 0.0(5) = 8.9(4)$ (точное значение $8.94427191\ldots$);

в) $\operatorname{arctg} 1.05 \approx \frac{\pi}{4} + 0.025 = 0.810398\ldots$ (ибо $\frac{\pi}{4} = 0.785398\ldots$).

4) Для функции $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, найти точки на графике, где касательная перпендикулярна прямой $y = 8x$. Составить уравнения касательных в найденных точках.

<u>Ответ</u>: $y = -\frac{1}{8}(1+x)$ в точке $M_1\left(3, -\frac{1}{2}\right)$, $\quad y = -\frac{1}{8}(x+17)$ в точке $M_2\left(-5, -\frac{3}{2}\right)$.

5) Точка движется по закону $x = 1 + \sin t$, $y = 1 - \sin t$, $t \geqslant 0$. Изобразить траекторию движения. Найти координаты положений, в которых абсолютная величина скорости равна 1.

<u>Ответ</u>: $M_1(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ и $M_2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$.

6) Нарисовать кривую $x = \varphi\cos\varphi$, $y = \varphi\sin\varphi$ с параметром $\varphi > 0$. Найти угол, образованный в пересечении кривой с осью Oy при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и в пересечении с осью Ox при $\varphi = 2\pi$. Составить уравнение касательной к кривой в первой из точек пересечения.

<u>Ответ</u>: $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}$ с осью Oy; $\beta = \operatorname{arctg} 2\pi$ с осью Ox; $y = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}x$ — касательная.