Занятие 8 для групп Д2–01, Д2–02, Д2–03, Д2–04
Тема: поведение функций, нахождение экстремумов

Поведения функции исследуется при помощи производной. Справедливы правила:

если $f'(x) > 0$ на интервале J, то функция $f(x)$ возрастает на J;

если $f'(x) < 0$ на интервале J, то функция $f(x)$ убывает на J;

если $f'(x)$ в точке x_0 меняет знак с «+» на «−», то x_0 — точка локального максимума для $f(x)$;

если $f'(x)$ в точке x_0 меняет знак с «−» на «+», то x_0 — точка локального минимума для $f(x)$.

Точки, в которых производная непрерывной функции $f(x)$ существует и отлична от нуля, называются *регулярными* или *правильными* для $f(x)$. Прочие внутренние точки области определения объявляются *критическими*. Они подозреваются на экстремум.

Уравнение критических точек: $\boxed{f'(x) = 0}$ — связь с теоремой Ферма.

Задачи

1) Привести пример дифференцируемой функции, у которой критическая точка не является точкой экстремума.

2) Найти интервалы монотонности для функции $y = x^3 - 6x^2 + 5$.

Ответ: функция возрастает на $(-\infty,\ 0\,]$ и на $[\,4,\ \infty)$; убывает на $[\,0,\ 4\,]$.

3) Найти интервалы монотонности для функции $y = (x-2)^2\, e^{-x}$.

Ответ: функция возрастает на $[\,2,\ 4\,]$; убывает на $(-\infty,\ 2\,]$ и на $[\,4, \infty)$.

4) Найти интервалы монотонности для функции $y = \ln x - 8x^2$.

Ответ: функция возрастает на $(\,0,\ \frac{1}{4}\,]$; убывает на $[\,\frac{1}{4}, \infty)$.

5) Найти точки экстремумов для функций: а) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}$; б) $y = x - \ln(x - 10)$.

Ответ: а) $x_1 = 0$ — т. лок. макс., $x_2 = 1$ — т. лок. мин.; б) $x_1 = 11$ — т. лок. мин.

6) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$ на отрезке $[-2, 5\,]$.

Ответ: $f(-1) = f(5) = 3$ — максимум функции; $f(3) = -29$ — минимум.

7) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^x$ на отрезке $[\,\frac{1}{10},\ 10\,]$.

Ответ: $f(10) = 10^{10}$ — максимум функции; $f(e^{-1}) = e^{-e^{-1}} \approx 0.6922$ — минимум.

8) Положительное число a складывается с обратным к нему числом, умноженным на 4. При каком значении a полученная сумма будет минимальной?

Ответ: $S_{\min} = 4$ при $a = 2$.

9) Закрытая бочка имеет форму цилиндра. При заданном объеме v подобрать радиус основания и высоту бочки так, что площадь ее поверхности была наименьшей.

Ответ: $S_{\min} = 3\sqrt[3]{2\pi v^2}$ при $r = \sqrt[3]{\dfrac{v}{2\pi}}$ и $h = \sqrt[3]{\dfrac{4v}{\pi}}$.

10) Через заданную точку $A(9, 1)$ провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях оказалась наименьшей.

Ответ: $y = 4 - \dfrac{x}{3}$; сумма длин отрезков $(a+b)_{\min} = 16$.