Занятие 9 для групп Д2–01, Д2–02, Д2–03, Д2–04
Тема: построение графиков с подробным исследованием

I. Первая производная от $f(x)$ характеризует возрастание/убывание функции:

если $f'(x) > 0$ на интервале J, то $f(x)$ возрастает на J;

если $f'(x) < 0$ на интервале J, то $f(x)$ убывает на J;

если $f'(x)$ в точке x_0 меняет знак, то x_0 — точка локального экстремума.

II. Вторая производная от $f(x)$ характеризует направление выпуклости функции:

если $f''(x) > 0$ на интервале J, то график Γ_f выпуклый вниз на J;

если $f''(x) < 0$ на интервале J, то график Γ_f выпуклый вверх на J;

если $f''(x)$ в точке x_0 меняет знак, то x_0 — точка перегиба для $f(x)$.

Задачи

1) Построить с подробным исследованием графики функций:

а) $y = x(x-3)^2$; б) $y = x\sqrt{x+3}$; в) $y = \ln(x^2+4)$.

Указания:

а) $x_1 = 1$ — т. лок. макс., $x_2 = 3$ — т. лок. мин., $x_3 = 2$ — т. перегиба;

б) $x_0 = -2$ — т. минимума, функция всюду выпукла вниз;

в) $x_0 = 0$ — т. минимума, $x_{1,2} = \pm 2$ — т. перегиба.

2) Кривая на плоскости задана параметрическим уравнением:

$$x = 4\cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Изобразить график кривой. Составить уравнение касательной к графику в точке, отвечающей $t = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $y = \dfrac{x}{4} + \sqrt{2}$.

3) Составить уравнение касательной к графику эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точке (x_0, y_0), принадлежащей графику.

Ответ: $\dfrac{x_0\, x}{a^2} + \dfrac{y_0\, y}{b^2} = 1$.