1. Занятие 1. Пределы

1. Дать определения

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty.$$

2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n}, \qquad \big(|a| < 1, \quad |b| < 1\big);$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right);$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - \ldots + \dfrac{(-1)^n n}{n}\right).$

Ответы: а) $\dfrac{1-b}{1-a}$, **б)** $\dfrac{1}{2}$, **в)** не существует.

3. Пользуясь формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k} b^k, \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

доказать равенства:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \qquad \big(a > 0\big);$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

3. a) Указание: Основной случай: $a > 1$. Представить a в виде

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\,\right)^n = \big(1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\big)^n$$

и воспользовавшись положительностью выражения $\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$, оценить сумму правой части бинома Ньютона снизу её вторым слагаемым:

$$a = \big(1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\big)^n = 1 + n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) + \underbrace{\ldots}_{>0} > n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right),$$

откуда $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n}$.

3. b) Указание: Представить n в виде $n = \left(\sqrt[n]{n}\,\right)^n = \left(1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right)^n$ и воспользовавшись положительностью выражения $\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$, оценить сумму правой части бинома Ньютона снизу её третьим слагаемым:

$$n = \big(1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\big)^n = 1 + n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 + \underbrace{\ldots}_{>0} > \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2,$$

откуда $0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$.