1. Занятие 7. Дифференциалы и производные функций многих переменных

Опр. 1.1. Функцией $f(x)$ в $\mathbb{R}^n$ называется **закон соответствия**, по которому каждому набору n переменных $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$ ставится в соответствие **одно (!)** число $f(x) \equiv f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.
Частной производной функции $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ по переменной x_i в точке $a(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ называется **число** равное производной в точке a_i по переменной x_i от функции $f_i(x_i)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) = \frac{df_i}{dx_i}(a_i), \qquad \text{где}$$

$$f_i(x_i) \equiv f(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{i-1},\ x_i,\ a_{i+1},\ \ldots,\ a_n).$$

Пример 1.1. Пусть $f(x,\ y) = \sin x \cos y$. Найдем производную $\frac{\partial f}{\partial x}$, для этого будем считать $y = const$, продифференцируем выражение $\sin x \cos y$ по x: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y$.
Чтобы найти производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, фиксируем x и, считая $x = const$, продифференцируем выражение $\sin x \cos y$ по y: $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cdot (-\sin y)$.

№ 1. Найти частные производные от функции f по каждой переменной, если

а) $f(x,\ y) = xy^2 + x^3y^4$; $\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 3x^2y^4,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 4x^3y^3\right)$;

б) $f(x,\ y) = \sin(xy) \ln \frac{x-1}{y+1}$;

в) $f(x,\ y,\ z) = \sin(x^2y) + e^{yz^3}$.

Опр. 1.2. Дифференциалом функции $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ называется **главная линейная часть приращения функции Δf**

$$\Delta f = \underbrace{A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n}_{\text{главная линейная часть}} + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}\right), \qquad \text{при}\ \ \Delta x \to 0.$$

Формальнодифференциал записывают в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

№ 2. Записать формальный дифференциал для следующих функций:

а) $f(x,\ y,\ z) = x^2y + y^2z$, $\quad \left(df = 2xydx + \ (x^2 + 2yz)\, dy + y^2dz\right)$;

б) $f(x,\ y,\ z) = \sin(x^2y) + e^{yz^3}$;

в) $f(x,\ y,\ z) = \sqrt{\sin^2(xyz) + e^{x+yz^2}}$.

№ 3. Для функции $f(x)$ записать приращение Δf в точке x_0 через дифференциал df:

а) $f(x,\ y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $\quad \left(\frac{-y\Delta x + x\Delta y}{x^2+y^2} + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)\right)$;

б) $f(x,\ y,\ z) = \sin(x^2 + y^3 + z^4)$,
$\left(\cos(x^2 + y^3 + z^4)\,(2x\Delta x + 3y^2\Delta y + 4z^3\Delta z) + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right)\right)$.