Содержание

1. Кратные интегралы **2**
1.1. Двойной интеграл . . . 2
1.2. Свойства двойного интеграла . . . 3
1.3. Классы интегрируемых функций . . . 5
1.4. Сведение двойного интеграла к повторному . . . 6
1.5. Замена переменных в двойном интеграле . . . 7
Контрольные вопросы . . . 8

2. Тройной и криволинейный интеграл **9**
2.1. Тройной интеграл . . . 9
2.2. Классы интегрируемых функций . . . 9
2.3. Свойства тройного интеграла . . . 9
2.4. Сведение тройного интеграла к повторному . . . 10
2.5. Замена переменных в тройном интеграле . . . 11
2.6. Криволинейный интеграл . . . 13
2.7. Вычисление криволинейных интегралов . . . 14
2.8. Свойства криволинейных интегралов . . . 15
2.9. Формула Грина . . . 16
2.10. Интегрирование полного дифференциала . . . 16
Контрольные вопросы . . . 17

3. Числовые ряды **17**
3.1. Основные понятия . . . 17
3.2. Критерий Коши . . . 18
3.3. Необходимое условие сходимости ряда . . . 18
3.4. Свойства сходящихся рядов . . . 19
3.5. Признаки сходимости рядов с положительными членами . . . 19
Контрольные вопросы . . . 21

4. Знакопеременные числовые ряды **22**
4.1. Условная и абсолютная сходимость ряда. Признак Лейбница . . . 22
4.2. Переместительное свойство абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана . . . 27
Контрольные вопросы . . . 28

5. Функциональные последовательности и ряды **28**
5.1. Поточечная и равномерная сходимость . . . 28
5.2. Критерий Коши и признак Вейерштрасса . . . 31
5.3. Свойства равномерно сходящихся рядов . . . 33
Контрольные вопросы . . . 34

6. Степенные ряды **35**
6.1. Понятие степенного ряда. Формула Коши – Адамара . . . 35
6.2. Свойства степенных рядов . . . 36
6.3. Ряд Тейлора . . . 38
6.4. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора . . . 40
Контрольные вопросы . . . 42

© Д.С. Ткаченко

1. Кратные интегралы

1.1. Двойной интеграл

Рассмотрим задачу о нахождении объема тела, ограниченного некоторой поверхностью. Легко догадаться, что, если все точки этого тела имеют абсциссы x из отрезка $[a,\ b]$, а площадь сечения этого тела каждой плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке с координатой x известна и равна $S(x)$, то

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx.$$

Частным случаем этой формулы является формула объема тела вращения: $V_{Ox} = \pi \int\limits_a^b y^2(x)dx$, все сечения которого – круги радиуса $y(x)$ с площадью $S(x) = \pi y^2(x)$.

Ну а что делать, если сечения тела имеют более сложную форму? Тут мы тоже имеем достаточный аппарат: площадь плоской фигуры может быть вычислена при помощи определенного интеграла. Если, к примеру, сечение зажато между кривыми $z = f_1(x,\ y)$ и $z = f_2(x,\ y) > f_1(x,\ y)$ (при фиксированном x) и поверхностями $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x) > y_1(x)$, то

$$V = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} (f_2(x,\ y) - f_1(x,\ y)dy \right) dx.$$

Так мы приходим к необходимости ввести двойной интеграл.

Опр. 1.1. Разбиением T_δ диаметра $\delta > 0$ прямоугольника Π

$\Pi = \{(x,\ y)|\ \ x \in [a,\ b],\ y \in [c,\ d]\}$ называется набор прямоугольников Π_{ij}

$\Pi_{ij} = \{(x,\ y)|\ \ x \in [x_{i-1},\ x_i],\ y \in [y_{j-1},\ y_j]\}$, где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$, причем диагонали каждого Π_{ij} не превосходят δ.

Интегральной суммой $\sigma(T_\delta)$, соответствующей разбиению T_δ и набору точек $P_{ij}(\xi_{ij},\ \eta_{ij}) \in \Pi_{ij}$, называется число

$$\sigma(T_\delta) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij},\ \eta_{ij})\Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

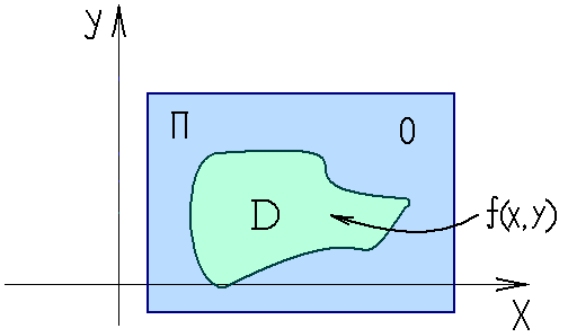
Опр. 1.2. Двойным интегралом от $f(x,\ y)$ по прямоугольнику Π называется число

$$I = \iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \lim_{\delta \to 0} \sigma(T_\delta) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij},\ \eta_{ij})\Delta x_i \Delta y_j,$$

где предел берется по всевозможным разбиениям при произвольном выборе точек P_{ij}, если такой предел существует. То есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \Delta > 0 :\ \ \forall\ T_\delta,\ \text{где}\ \delta \in (0, \Delta),\ \ \forall\ \text{выбора точек}\ \ P_{ij}(\xi_{ij},\ \eta_{ij}) \in \Pi_{ij}$$

$$\text{выполняется неравенство} \quad \left| I - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij},\ \eta_{ij})\Delta x_i \Delta y_j \right| < \varepsilon.$$



В случае, когда область D отлична от прямоугольника, поступают следующим образом: рассматривают прямоугольник $\Pi \supset D$, вводят функцию

$$F(x,\, y) = \begin{cases} f(x,\, y), & \text{в } D, \\ 0, & \text{вне } D \end{cases}$$

и вычисляют $\iint\limits_{\Pi} F(x,\, y)dxdy$.

Опр. 1.3. Двойным интегралом от $f(x,\, y)$ по области D, лежащей в прямоугольнике Π называется число

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Pi} F(x,y)dxdy,$$

где $F(x,\, y) = \begin{cases} f(x,\, y), & \text{при} \quad (x,\, y) \in D, \\ 0, & (x,\, y) \notin D. \end{cases}$.

Замечание 1.1. Есть другое определение двойного интеграла по произвольной области D. Оно является полным аналогом определения определенного интеграла. Сначала для него вводится понятие разбиения на частичные области (не обязательно прямоугольные), а затем понятие интегральной суммы. Сам двойной интеграл вводится как предел интегральных сумм по всевозможным разбиениям при стремлении диаметра разбиения к 0.
Это определение равносильно нашему, поэтому мы его полностью приводить не будем.

Замечание 1.2. Как и в случае с определенным (однократным) интегралом, никто не вычисляет интегралы через предел интегральных сумм. Сначала доказываются некоторые свойства двойного интеграла, и вычисление его для конкретных примеров основывается на этих свойствах.

Замечание 1.3. Как видно из определения 1.3, интегрируемость функции можно рассматривать не только на отдельной области, но и на объединении конечного числа областей.

1.2. Свойства двойного интеграла

Утверждение 1.1 (Линейность).

Усл. *Функции $f(x,\, y)$ и $g(x,\, y)$ интегрируемы в области D.*

Утв. *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $(\alpha f(x,y) + \beta g(x,\, y))$ интегрируема в области D и*

$$\iint\limits_{D} (\alpha f(x,y) + \beta g(x,\, y))dxdy = \alpha \iint\limits_{D} f dxdy + \beta \iint\limits_{D} g dxdy.$$

Доказательство. [1] Введем функции $F(x,\, y)$ и $G(x,\, y)$, продолжив $f(x)$ и $g(x,\, y)$ нулем в некоторый прямоугольник $\Pi \supset D$.

[1] Это и последующие доказательства используют свойства пределов, доказанные ранее для пределов последовательности и функции, в то время как предел, используемый в определении

Пользуясь определением двойного интеграла по произвольной области и по прямоугольнику, а также свойствами суммы, напишем цепочку равенств:

$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,\, y))dxdy =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(\alpha F(\xi_{ij},\eta_{ij}) + \beta G(\xi_{ij},\eta_{ij}))\Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left(\alpha\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}F(\xi_{ij},\eta_{ij}) + \beta\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}G(\xi_{ij},\eta_{ij})\right)\Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= \alpha\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}F(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i \Delta y_j + \beta\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}G(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= \alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta\iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

Заметим, что данная цепочка равенств доказывает и интегрируемость функции $(\alpha f(x,y) + \beta g(x,\, y))$, и выполнение требуемого равенства. □

Утверждение 1.2 (Аддитивность).

Усл. *$D_{1,2}$ – области без общих внутренних точек, а $D = D_1 \bigcup D_2$.*

Утв.1. *$f(x,\, y)$ интегрируема по D $\iff$ $f(x,\, y)$ интегрируема по каждой из областей D_1 и D_2.*

Утв.2. *Верна формула:*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Утверждение 1.3 (Интегрирование неравенств).

Усл. *Функции $f(x,\, y)$ и $g(x,\, y)$ интегрируемы в области D и $f \leqslant g$ в D.*

Утв.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leqslant \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

двойного интеграла, не является ни пределом последовательности, ни пределом функции. Однако, его определение, явно выписанное в Опр. 1.2, полностью аналогично определению предела функции от параметра δ, поэтому и все свойства такого предела доказываются дословным повторением доказательства этих свойств для предела функции. Мы будем пользоваться этими свойствами, не оговаривая этого в дальнейшем и считая их обоснованными.

Утверждение 1.4 (Абсолютная интегрируемость).

Усл. *Функция $f(x,\,y)$ интегрируема в области D.*

Утв. *Функция $|f(x,\,y)|$ интегрируема в области D и*

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy.$$

Утверждение 1.5 (Геометрическое свойство).

Утв. *1) $\iint\limits_D 1dxdy$ равен площади области D.*
2) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ равен объему под поверхностью $z = f(x,\,y)$ $(f \geqslant 0)$ внутри цилиндра $(x,\,y) \in D$.

Теорема 1.1 (Теорема о среднем).

Усл. *$f(x,\,y)$ непрерывна в связной области D, а $g(x,\,y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ интегрируема в D.*

Утв.

$$\exists(\xi,\,\eta) \in D: \quad \iint\limits_D f(x,\,y)g(x,\,y)dxdy = f(\xi,\,\eta)\iint\limits_D g(x,\,y)dxdy.$$

1.3. Классы интегрируемых функций

Аналогично случаю однократного интеграла доказываются факты:

Теорема 1.2 (Необходимое условие интегрируемости).

Усл. *Функция $f(x,\,y)$ интегрируема в области D.*

Утв. *$f(x,\,y)$ ограничена в D.*

Теорема 1.3 (Достаточное условие интегрируемости).

Усл. *Функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области D, за исключением, быть может конечного числа кривых $\Gamma_p:\ x = \varphi_{p1}(t),\ y = \varphi_{p2}(t)$, где $\varphi_{p1}, \varphi_{p2}$ – непрерывные функции. При этом $f(x,y)$ ограничена в D.*

Утв. *Функция $f(x,\,y)$ интегрируема в D.*

1.4. Сведение двойного интеграла к повторному

Теорема 1.4 (Случай прямоугольной области).

Усл. *$f(x,\ y)$ интегрируема в прямоугольнике*

$$\Pi = \{x \in [a,\ b],\ \ y \in [c,\ d]\} \text{ и}$$

$$\forall x \in [a,\ b] \quad \exists \ \text{ интеграл } \ I(x) = \int\limits_c^d f(x,\ y)dy.$$

Утв. *Существует повторный интеграл*

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\ y)dy \equiv \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,\ y)dy \right) dx$$

и имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,\ y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\ y)dy.$$

Теорема 1.5 (Случай произвольной области).

Усл. *$f(x,\ y)$ интегрируема в области D, а область D такова, что ее проекция на ось Ox есть отрезок $[a,\ b]$, и любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает $\overline{D}$ по отрезку $[y_1(x),\ y_2(x)]$; при этом*

$$\forall x \in [a,\ b] \quad \exists \ \text{ интеграл } \ I(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)dy.$$

Утв. *Существует повторный интеграл*

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)dy$$

и имеет место равенство

$$\iint\limits_{D} f(x,\ y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)dy.$$

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник $\Pi \supset D$ и в нем функцию

$$F(x,\ y) = \begin{cases} f(x,\ y), & \text{при} \quad (x,\ y) \in D, \\ 0, & \quad\ \ (x,\ y) \notin D. \end{cases}$$

Для нее, по теореме 1.4, верна формула

$$\iint\limits_{\Pi} F(x,\ y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d F(x,\ y)dy.$$

Но левая часть этого равенства, по определению 1.3 (стр. 3), совпадает с двойным интегралом $\iint\limits_D f(x,\,y)dxdy$, а внутренний интеграл правой части можно, в силу свойства аддитивности интеграла Римана, переписать в виде: $\int\limits_c^d F(x,\,y)dy = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\,y)dy$. □

Замечание 1.4. В формулировках теорем 1.4 и 1.5 переменные x и y можно поменять ролями. Тогда получится повторный интеграл с внутренним интегралом по x:

$$\iint\limits_D f(x,\,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\,y)dx.$$

Пример 1.1. Найти интеграл от $f(x,y) = x^2y^3$ по области, ограниченной линиями: $y = x^2$; $y = x$. Нарисовав область, найдем пределы изменения x: $x \in [0,\ 1]$ и, при каждом фиксированном x, выясним, как меняется y: $y \in [x^2,\ x]$. Теперь можно вычислить двойной интеграл, приведя его к повторному:

$$\iint\limits_D f(x,\,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} x^2y^3dy = \int\limits_0^1 x^2dx \int\limits_{x^2}^{x} y^3dy =$$

$$= \int\limits_0^1 x^2 \left(\frac{y^4}{4}\Big|_{y=x^2}^{y=x} \right) dx = \int\limits_0^1 x^2 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^8}{4} \right) dx = \left(\frac{x^7}{28} - \frac{x^{11}}{44} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{28} - \frac{1}{44} = \frac{1}{77}.$$

1.5. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть задано отображение области $(x,\,y) \in D$ в декартовых координатах на область $(\xi,\,\eta) \in D' \subset \mathbb{R}^2$ в криволинейных координатах $(\xi,\,\eta)$ при помощи соотношений

$$\begin{cases} x = x(\xi,\,\eta); \\ y = y(\xi,\,\eta). \end{cases} \tag{1.1}$$

Опр. 1.4. Определителем Якоби (Якобианом) перехода от переменных $(x,\,y)$ к переменным $(\xi,\,\eta)$ называется **определитель**:

$$\frac{D(x,\,y)}{D(\xi,\,\eta)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1.6 (Замена переменных).

Усл. *Преобразование (1.1) переводит область D в D' и является взаимно-однозначным, функции в (1.1) имеют непрерывные частные производные первого порядка и якобиан $\frac{D(x,\,y)}{D(\xi,\,\eta)} \neq 0, \quad (\xi,\ \eta) \in D'$.*

Утв. *Справедлива формула замены переменных:*

$$\iint\limits_D f(x,\,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(\xi,\ \eta),\ y(\xi,\ \eta)) \left|\frac{D(x,\,y)}{D(\xi,\,\eta)}\right| d\xi d\eta.$$

Пример 1.2 (Двойной интеграл в полярных координатах). Пусть нам надо вычислить интеграл $\iint\limits_D f(x,\,y)dxdy$ по области D, ограниченной окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$ и лучами $\varphi=\alpha,\ \varphi=\beta,\ 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ от функции $f(x,\,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$. Его, безусловно, можно свести к повторному, разбив промежуток интегрирования по x на 3 отрезка, но вычисления полученного повторного интеграла будут довольно громоздкими.
Мы воспользуемся тем, что в полярных координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

и границы области, и подынтегральная функция приобретают очень простой вид:

$$D': \quad \left| \begin{array}{l} r=1, \\ r=2, \\ \varphi=\alpha, \\ \varphi=\beta; \end{array} \right. \qquad f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)=\sqrt{1+r^2}$$

и перейдем к полярным координатам. Посчитаем якобиан:

$$\frac{D(x,\,y)}{D(r,\,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Поэтому

$$\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_{D'} \sqrt{1+r^2}\ \overbrace{\left|\frac{D(x,\,y)}{D(r,\,\varphi)}\right|}^{r} drd\varphi =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_1^2 \sqrt{1+r^2}\ rdr = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_1^2 \sqrt{1+r^2}d(1+r^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta d\varphi \frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=1}^{r=2} = \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}\varphi\Big|_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\beta} = \frac{(\beta-\alpha)(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{3}.$$

Контрольные вопросы. **1)** Что такое интегральная сумма? **2)** Дайте определение двойного интеграла (для прямоугольной и произвольной области). **3)** Перечислите свойства двойного интеграла. **4)** Как вычислять двойной интеграл? **5)** Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле.

2. Тройной и криволинейный интеграл

2.1. Тройной интеграл

Совершенно аналогично двойному, можно ввести тройной интеграл:

а) ввести понятия разбиения прямоугольного параллелепипеда, интегральной суммы, тройного интеграла по прямоугольному параллелепипеду:

$$\iiint\limits_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz,$$

б) ввести понятие тройного интеграла по произвольному телу (области в $\mathbb{R}^3$):

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Pi} F(x,y,z)dxdydz,$$

где F – функция, совпадающая с f внутри D, и равная нулю за её пределами.

Свойства тройного интеграла, введённого таким образом, формулируются и доказываются также полностью аналогично свойствам двойного. Перечислим их:

2.2. Классы интегрируемых функций

Теорема 2.1 (Необходимое условие интегрируемости).
Усл. *Функция $f(x,y,z)$ интегрируема в области D.*
Утв. *$f(x,y,z)$ ограничена в D.*

Теорема 2.2 (Достаточное условие интегрируемости).
Усл. *Функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области D, за исключением, быть может конечного числа поверхностей S_p :*
$x = \varphi_{p1}(s,t),\ y = \varphi_{p2}(s,t),\ z = \varphi_{p3}(s,t)$, где $\varphi_{p1}, \varphi_{p2}, \varphi_{p3}$ – непрерывные функции. При этом $f(x,y,z)$ ограничена в D.
Утв. *Функция $f(x,y,z)$ интегрируема в D.*

2.3. Свойства тройного интеграла

Утверждение 2.1 (Линейность).
Усл. *Функции $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ интегрируемы в области D.*
Утв. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\iiint\limits_{D} (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))dxdydz =$

$$= \alpha \iiint\limits_{D} f(x,y,z)dxdydz + \beta \iiint\limits_{D} g(x,y,z)dxdydz.$$

Утверждение 2.2 (Аддитивность).

Усл. *$D = D_1 \bigcup D_2$, где $D_{1,2}$ – области без общих внутренних точек.*

Утв. *f интегрируема по D $\iff$ f интегрируема по D_1 и по D_2 и имеет место формула:*

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{D_1} fdxdydz + \iiint\limits_{D_2} fdxdydz.$$

Утверждение 2.3 (Интегрирование неравенств).

Усл. *Функции $f(x,\ y,\ z)$ и $g(x,\ y,\ z)$ интегрируемы в области D и $f \leqslant g$ в D.*

Утв.

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz \leqslant \iiint\limits_D g(x,y,z)dxdydz.$$

Утверждение 2.4 (Абсолютная интегрируемость).

Усл. *Функция $f(x,\ y,\ z)$ интегрируема в области D.*

Утв. *Функция $|f(x,\ y,\ z)|$ интегрируема в области D и*

$$\left|\iiint\limits_D f(x,\ y,\ z)dxdydz\right| \leqslant \iiint\limits_D |f(x,\ y,\ z)|dxdydz.$$

Утверждение 2.5 (Геометрическое свойство).

Утв.

1) *$\iiint\limits_D 1\ dxdydz$ равен объему тела D.*
2) *$\iiint\limits_D f(x,\ y,\ z)dxdydz$ равен массе тела D, плотность которого в каждой точке равна значению $f(x,\ y,\ z) \geqslant 0$.*

2.4. Сведение тройного интеграла к повторному

Пример 2.1. Найти интеграл от $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$ по объему, ограниченному поверхностью $z = xy$, плоскостью $z = 0$ и плоскостью $x + y = 1$. Нарисовав тело, найдем пределы изменения x: $x \in [0,\ 1]$ и, при каждом фиксированном x, выясним, как меняется y: $y \in [0,\ 1-x]$. Теперь при фиксированных x и y, видим, что $z \in [0,\ xy]$. Сведем тройной интеграл к повторному, аналогично способу для двойного интеграла:

$$\iiint\limits_D f(x,\ y,\ z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{xy} (x + y^2 + z^3)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(xz + y^2z + \tfrac{z^4}{4}\right)\Big|_{z=0}^{z=xy} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(x^2y + xy^3 + \tfrac{x^4y^4}{4}\right) dy = \int\limits_0^1 \left(\tfrac{x^2y^2}{2} + \tfrac{xy^4}{4} + \tfrac{x^4y^5}{20}\right)\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\tfrac{x^2(1-x)^2}{2} + \tfrac{x(1-x)^4}{4} + \tfrac{x^4(1-x)^5}{20}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{20}\int\limits_0^1 (5x - 10x^2 + 10x^3 - 9x^4 + 10x^6 - 10x^7 + 5x^8 - x^9)\,dx =$$

$$= \frac{1}{20}\left(\frac{5x^2}{2} - \frac{10x^3}{3} + \frac{10x^4}{4} - \frac{9x^5}{5} + \frac{10x^7}{7} - \frac{10x^8}{8} + \frac{5x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{20}\left(\frac{5}{2} - \frac{10}{3} + \frac{10}{4} - \frac{9}{5} + \frac{10}{7} - \frac{10}{8} + \frac{5}{9} - \frac{1}{10}\right) = \frac{631}{25200}$$

2.5. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть задано отображение области $(x,\ y,\ z) \in D$ в декартовых координатах на область $(\xi,\ \eta,\ \zeta) \in D' \subset \mathbb{R}^3$ в криволинейных координатах $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ при помощи соотношений

$$\begin{cases} x = x(\xi,\ \eta,\ \zeta); \\ y = y(\xi,\ \eta,\ \zeta); \\ z = z(\xi,\ \eta,\ \zeta). \end{cases} \tag{2.1}$$

Опр. 2.1. Определителем Якоби (Якобианом) перехода от переменных $(x,\ y,\ z)$ к переменным $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ называется **определитель**:

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\xi,\ \eta,\ \zeta)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2.3 (Замена переменных).
Усл. *Преобразование (2.1) переводит область D в D' и является взаимно-однозначным, функции в (2.1) имеют непрерывные частные производные первого порядка и якобиан $\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\xi,\ \eta,\ \zeta)} \neq 0,\ \ (\xi,\ \eta,\ \zeta) \in D'$.*
Утв. *Справедлива формула замены переменных:*

$$\iiint\limits_D f(x,\ y,\ z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{D'} f(x(\xi,\ \eta,\ \zeta),\ y(\xi,\ \eta,\ \zeta),\ z(\xi,\ \eta,\ \zeta)) \left|\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\xi,\ \eta,\ \zeta)}\right| d\xi d\eta d\zeta.$$

Пример 2.2 (Тройной интеграл в цилиндрических координатах). В некоторых случаях вычислять тройной итеграл, сводя его к повторному в декартовых координатах, весьма трудоемко. Тогда приходит на помощь формула замены переменных. Одними из наиболее часто используемых систем криволинейных координат являются т.н. **цилиндрические координаты** $(r,\ \varphi,\ z)$**:**

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi; \\ z = z. \end{cases}$$

Якобиан перехода к цилиндрическим координатам:

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \varphi,\ z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Целесообразно использовать цилиндрические координаты, если границы области и подынтегральная функции принимают в этих координатах наиболее простой вид.

Например, пусть нам надо вычислить интеграл $\iiint\limits_D f dxdydz$ по области D, ограниченной цилиндрами $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$, плоскостями $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta,\ 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ и плоскостями $z = 0$ и $z = 1$ от функции $f(x,\ y,\ z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. В цилиндрических координатах границы области, и подынтегральная функция приобретают очень простой вид:

$$D' : \quad \left| \begin{array}{l} r = 1, \\ r = 2, \\ \varphi = \alpha, \\ \varphi = \beta, \\ z = 0, \\ z = 1; \end{array} \right. \qquad f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z) = \sqrt{r^2 - 1}.$$

$$\iiint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2 - 1} dxdydz = \iiint\limits_{D'} \sqrt{r^2 - 1}\ \overbrace{\left|\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \varphi,\ z)}\right|}^{r} drd\varphi dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_1^2 \sqrt{r^2 - 1}\ rdr \int\limits_0^1 dz = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi\ \frac{1}{3}(r^2 - 1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=1}^{r=2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - 0}{3}(\beta - \alpha) = \sqrt{3}(\beta - \alpha).$$

Пример 2.3 (Тройной интеграл в сферических координатах)**.**
В случаях, когда вычислять тройной итеграл надо по областям со сферическими границами, а подынтегральная функция легко выражается через расстояние от точки до начала координат и углы между направлением на точку и координатными плоскостями, имеет смысл использовать систему криволинейных координат под названием **сферические координаты** $(r,\ \varphi,\ \psi)$**:**

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi\cos\psi; \\ y = r\sin\varphi\cos\psi; \\ z = r\sin\psi; \end{array} \right. \qquad \varphi \in [0,\ 2\pi),\ \ \psi \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Якобиан перехода к сферическим координатам:

$$\frac{D(x,\,y,\,z)}{D(r,\,\varphi,\,\psi)} = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{array} \right| = r^2\cos\psi.$$

Пусть надо вычислить интеграл $\iiint\limits_D f(x,\ y,\ z)dxdydz$ по области D, ограниченной сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, плоскостями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta,\ 0 < \alpha < \beta < 2\pi$ и плоскостями $\psi = \gamma$ и $\psi = \delta,\ \ -\frac{\pi}{2} < \gamma < \delta < \frac{\pi}{2}$ от функции $f(x,\ y,\ z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$. В сферических координатах границы области, и подынтегральная функция приобретают очень простой вид:

$$D' : \quad \left| \begin{array}{l} r = 1, \\ r = 2, \\ \varphi = \alpha, \\ \varphi = \beta, \\ \psi = \gamma, \\ \psi = \delta; \end{array} \right. \qquad f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z) = \frac{1}{r^2}.$$

$$\iiint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iiint\limits_{D'} \frac{1}{r^2} \overbrace{\left|\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \varphi,\ \psi)}\right|}^{r^2\cos\psi} drd\varphi d\psi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_1^2 \frac{r^2}{r^2}dr \cdot$$

$$\cdot \int\limits_\gamma^\delta \cos\psi d\psi = (\beta-\alpha)\cdot 1\cdot (\sin\psi)\big|_{\psi=\gamma}^{\psi=\delta} = (\beta-\alpha)\cdot(\sin\delta - \sin\gamma)\,.$$

Замечание 2.1. Совершенно аналогично тому, как мы вводили двойной и тройной интегралы, определяется n – **кратный интеграл**.
Естественным образом обобщаются на случай n – кратного интеграла теоремы о классах интегрируемых функций, практически без изменений переписываются свойства от аддитивности до теоремы о среднем. Абсолютно также формулируются и доказываются теоремы о сведении n – кратного интеграла к n – кратному повторному.

2.6. Криволинейный интеграл

Пусть задана кривая одним из трех способов:

1) **в декартовых координатах:** $y = f(x), \quad x \in [a\ b]$;

2) **в полярных координатах:** $r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha,\ \beta]$;

3) **параметрически:** $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a,\ b]$.

Вспомним определение дифференциала дуги:

Опр. 2.2. Дифференциалом дуги кривой, заданной в декартовых, полярных координатах, либо параметрически, называется **величина** dl:

- **в декартовых координатах:** $dl = \sqrt{1+y'^2(x)}\ dx$;
- **в полярных координатах:** $dl = \sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\ d\varphi$;
- **параметрически:** $dl = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\ dt$.

Заметим, что способы задания кривой в полярных и декартовых координатах являются частными случаями параметрического способа задания. Поэтому некоторые выкладки мы будем для краткости проделывать только для этого случая, имея в виду, что положив $x = t,\ y = y(t)$, мы перейдем к декартовым координатам, а $\varphi = t,\ x = r(t)\cos t,\ y = r(t)\sin t$ – к полярным.

Будем всюду полагать, что функции, входящие в выражения для дифференциала дуги, непрерывны.

Разобьем отрезок изменения переменной $t \in [a,\ b]$ на частичные отрезки точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$.

Выражение $\Delta l_i = \int\limits_{t_i-1}^{t_i} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\ dt$ равно длине частичного отрезка дуги кривой, соответствующего изменению $t \in [t_{i-1},\ t_i]$.

Опр. 2.3. **Диаметром разбиения кривой** L называется **число**, равное: $\delta = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \Delta l_i$.

Выражения
$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta l_i,$$
$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^{m} P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x_i, \qquad \sigma_3 = \sum_{i=1}^{m} Q(\xi_i,\ \eta_i)\Delta y_i$$

мы будем называть **первой, второй и третьей интегральной суммой**, соответственно. Здесь $\xi_i = x(\tau_i),\ y = y(\tau_i)$, а $\tau_i \in [t_{i-1},\ t_i]$ – произвольно выбранные точки.

Числа, равные пределам интегральных сумм по всевозможным разбиениям при стремлении диаметра разбиения к 0, мы будем называть соответственно

- **криволинейным интегралом I-го рода от** $f(x,\ y)$ **по кривой** L**,**
- **криволинейным интегралом II-го рода от** $P(x,\ y)$ **по кривой** L**,**
- **криволинейным интегралом II-го рода от** $Q(x,\ y)$ **по кривой** L

и обозначать
$$\int\limits_L f(x,\ y)dl; \quad \int\limits_L P(x,\ y)dx; \quad \int\limits_L Q(x,\ y)dy.$$

При этом сумма последних двух интегралов называется **общим криволинейным интегралом II-го рода** и обозначается
$$\int\limits_L P(x,\ y)dx + \int\limits_L Q(x,\ y)dy = \int\limits_L P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy.$$

2.7. Вычисление криволинейных интегралов

Опр. 2.4. **Точку** $(x(t^*),\ y(t^*))$ **кривой** L мы будем называть **особой**, если
$$x'^{\,2}(t^*) + y'^{\,2}(t^*) = 0.$$

Теорема 2.4.
Усл. *Кривая L задана параметрически $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,\ b]$, причем $x'(t),\ y'(t)$ непрерывны на $t \in [a,\ b]$; L не содержит особых точек; функции $f(x,y),\ P(x,y),\ Q(x,y)$ непрерывны вдоль этой кривой.*
Утв. *Криволинейные интегралы I-го и II-го рода существуют и могут быть сведены к обычным определенным интегралам:*
$$\int\limits_L f(x,\ y)dl = \int\limits_a^b f(x(t),\ y(t))\sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t)}\ dt;$$
$$\int\limits_L Pdx = \int\limits_a^b P(x(t),\ y(t))x'(t)\ dt; \quad \int\limits_L Qdy = \int\limits_a^b Q(x(t),\ y(t))y'(t)\ dt.$$

Замечание 2.2 (Физический смысл криволинейных интегралов).
Криволинейный интеграл I-го рода равен массе кривой L, линейная плотность вдоль которой

задана функцией $f(x,y)$.
Криволинейный интеграл II-го рода равен работе по перемещению материальной точки из начала в конец кривой L под действием силы, имеющей составляющие $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

Замечание 2.3 (Зависимость от направления интегрирования).
Криволинейный интеграл I-го рода не зависит от направления интегрирования, т.е. от того является точка $(x(a),\ y(a))$ – началом, а $(x(b),\ y(b))$ – концом кривой L, или наоборот.
Криволинейный интеграл II-го при изменении направления интегрирования меняет знак.

Пример 2.4. Найти массу окружности $x^2+y^2=a^2$, если ее плотность распределена по закону $f(x,y)=|y|$. Параметризуем окружность с помощью равенств
$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad t\in[0,\ 2\pi]$.

$$\int\limits_L |y|dl = a\int\limits_0^{2\pi}|\sin t|\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}dt = a^2\cdot 2\int\limits_0^{\pi}\sin t dt = 2a^2(-\cos t)\Big|_0^{\pi} =$$
$$= 2a^2(-(-1)-(-1)) = 4a^2.$$

Пример 2.5. Вычислить криволинейный интеграл II-го рода

$$I=\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy,$$

если L – дуга параболы $y=x^2,\ \ x\in[-1,\ 1]$.
Эту дугу можно параметризовать при помощи равенств $x=t;\ \ y=t^2$; при $t\in[-1,\ 1]$. По формуле из теоремы 2.4

$$I=\int\limits_{-1}^{1}(t^2-2t^3)dt+\int\limits_{-1}^{1}(t^4-2t^3)2tdt=\int\limits_{-1}^{1}(2t^5-4t^4-2t^3+t^2)dt=$$
$$=\left(\frac{2t^6}{6}-\frac{4t^5}{5}-\frac{2t^4}{4}+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=-\frac{8}{5}+\frac{2}{3}=-\frac{14}{15}.$$

2.8. Свойства криволинейных интегралов

Для криволинейных интегралов I-го и II-го рода верно свойство линейности, а для криволинейных интегралов I-го рода также свойства аддитивности, интегрирования неравенств и абсолютной интегрируемости, которые формулируются и доказываются так же, как для определенного, двойного и тройного интегралов, а также

Утверждение 2.6 (Формула среднего значения для к.и. I-го рода)).

Усл. *$f(x,\ y)$ непрерывна вдоль кривой L.*

Утв. $\exists M\in L:\qquad \int\limits_L f(x,y)dl = f(M)\cdot l$, *где l – длина кривой L.*

Связь криволинейных интегралов I-го и II-го рода.

Пусть в каждой точке $(x(t),\ y(t))$ кривой L ее касательная составляет с положительным направлением оси Ox угол $\alpha(t)$. Тогда, т.к. $dx = dl\cos\alpha,\ \ dy = dl\sin\alpha$, криволинейный интеграл II-го рода можно привести к криволинейному интегралу I-го рода:

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_L (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)dl.$$

2.9. Формула Грина

Пусть кривая L – замкнута, т.е. ее начальная и конечная точки совпадают: $(x(a),\ y(a)) = (x(b),\ y(b))$. В таком случае кривую L называют **замкнутым контуром**, а криволинейный интеграл II-го рода по ней обозначают $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. При этом всегда считается, что обход осуществляется против часовой стрелки, т.е. так, чтобы ограниченная контуром L область D при обходе кривой **всегда оставлась слева**.

Теорема 2.5.

Усл. *$P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$. Граница ∂D области есть кривая L.*

Утв. *Имеет место формула Грина:*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy.$$

2.10. Интегрирование полного дифференциала

Предположим, что $\exists$ функция $F(x,y):\quad \frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y),\quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y).$

Тогда под знаком криволинейного интеграла II-го рода $\int\limits_L Pdx + Qdy$ стоит полный дифференциал $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \equiv Pdx + Qdy$. В этом случае значение криволинейного интеграла не зависит от кривой, соединяющей точки A и B, и может быть найдено по формуле:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F\Big|_A^B = F(B) - F(A).$$

В самом деле, пусть есть 2 кривые L_1 и L_2, соединяющие точки A и B. Вместе они образуют замкнутый контур $C = L_1 \bigcup (-L_2)$, и по формуле Грина,

$$\oint\limits_C Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\right) dxdy \equiv \iint\limits_D 0 \cdot dxdy = 0,$$

откуда

$$\int\limits_{L_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_2} Pdx + Qdy.$$

Пример 2.6. Пусть точка A имеет координаты $A(1,\ 2)$, а точка $B(3,\ 4)$.

$$I = \int\limits_{AB} (2x+y)dx + xdy = \int\limits_{AB} d(x^2+xy) = (x^2+xy)\Big|_A^B =$$

$$= 3^2 + 3\cdot 4 - (1^2 + 1\cdot 2) = 18.$$

Контрольные вопросы. **1)** Дайте определение тройного интеграла. **2)** Перечислите свойства тройного интеграла. **3)** Приведите пример вычисления тройного интеграла путем сведения его к повторному однократному. **4)** Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле. **5)** Приведите пример вычисления тройного интеграла переходом к сферическим координатам. **6)** Дайте определение криволинейного интеграла I-го и II-го рода. **7)** Каковы свойства криволинейных интегралов? **8)** В каких случаях значение криволинейного интеграла не зависит от пути интегрирования?

3. Числовые ряды

3.1. Основные понятия

Опр. 3.1. **Числовым рядом** называется выражение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $\{a_n\}$ – некоторая числовая последовательность.
Само выражение a_n называется **общим членом ряда**.
n-ной частичной суммой S_n числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется число – сумма его первых n слагаемых:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Суммой S числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется число – предел его частичных сумм, если такой предел существует:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

В этом случае ряд называют **сходящимся**, и пишут $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в противном случае говорят, что ряд **расходится**.

Пример 3.1. Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Исследуем сходимость составленного из ее членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Найдем n-ую частичную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$. Это – сумма геометрической прогрессии, поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Теперь выясним, существует ли предел частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\searrow\, 0}\right) = 1.$$

3.2. Критерий Коши

Теорема 3.1 (Критерий Коши сходимости ряда).

Утв. *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \;\; \forall m > N \;\; \forall p \in \mathbb{N} \;\; \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Заметим, что последнее неравенство может быть записано в виде

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \right| \equiv |S_{m+p} - S_m| < \varepsilon,$$

то есть требование критерия Коши есть требование фундаментальности последовательности $\{S_n\}$. По критерию Коши сходимости числовой последовательности, фундаментальность числовой последовательности$\{S_n\}$ равносильна ее сходимости, т.е. существованию $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. □

Пример 3.2. Исследуем на сходимость ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\sqrt[n]{n^2+n+1}\right)}{2^n}$. Легко заметить, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство$\left|\frac{\cos\left(\sqrt[n]{n^2+n+1}\right)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Оценим левую часть последнего неравенства в критерии Коши для данного числового ряда:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{\cos\left(\sqrt[n]{n^2+n+1}\right)}{2^n} \right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{m+p} \left| \frac{\cos\left(\sqrt[n]{n^2+n+1}\right)}{2^n} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^m} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \leqslant \left[\, \forall\, p \in \mathbb{N} \,\right] \leqslant \frac{1}{2^m} \cdot 1 = \frac{1}{2^m}.$$

Итак, для того, чтобы условия критерия Коши были выполнены, нам надо уметь по произвольному $\varepsilon > 0$ указать номер $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы при каждом $m > N$ выполнялось неравенство

$$\frac{1}{2^m} < \varepsilon.$$

Очевидно, достаточно взять $N = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, так как

$$2^m > 2^N = 2^{\left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right]+1} > 2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, данный ряд сходится по критерию Коши.

3.3. Необходимое условие сходимости ряда

Теорема 3.2 (Необходимое условие сходимости ряда).

Усл. *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Утв. *Общий член ряда стремится к нулю:*

$$a_n \to 0, \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Запишем необходимое и достаточное условие сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ из критерия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \ \forall m > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \right| < \varepsilon$$

и возьмем в нем $p = 1$. Поскольку $\sum\limits_{n=m+1}^{m+1} a_n = a_{m+1}$, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \ \forall m > N \ \ |a_{m+1}| < \varepsilon.$$

Но это и означает, по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

3.4. Свойства сходящихся рядов

Теорема 3.3 (О сумме сходящихся рядов).

Усл. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ *– два сходящихся ряда.*

Утв. *Ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ *также сходятся и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$.

Доказательство. Введем обозначения для n-ых частичных сумм рассматирваемых рядов: $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, \ \ B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \ \ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k)$. Поскольку

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = (a_1 \pm b_1) + \ldots + (a_n \pm b_n) =$$
$$= (a_1 + \ldots + a_n) \pm (b_1 + \ldots + b_n) = A_n \pm B_n,$$

то по свойству линейности пределов

$$\exists\, S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \pm B_n) = A \pm B.$$

□

Теорема 3.4 (Об отбрасывании конечного числа слагаемых).

Утв. *Отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на сходимость ряда.*

3.5. Признаки сходимости рядов с положительными членами

Теорема 3.5 (I-ый признак сравнения).

Усл. $\forall n \in \mathbb{N}$ *выполнены неравенства* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

Утв. *1)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится* $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится* $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится.*

Доказательство. В силу неравенства $a_n \leqslant b_n$ для частичных сумм A_n и B_n выполнено аналогичное неравенство:

$$A_n \leqslant B_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Последовательности A_n и B_n – монотонно неубывают, т.к. $a_n, b_n \geqslant 0$.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда существует предел $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$, причем $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \leqslant B$. Мы получили, что A_n – монотонная и ограниченная последовательность, следовательно, она имеет предел, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Наоборот, пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Тогда последовательность A_n неограничена, а в силу (3.1), последовательность B_n тоже неограничена. Неограниченная последовательность не может иметь конечный предел, следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. □

Теорема 3.6 (Признак Даламбера).

Усл. $\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n > 0, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q.$

Утв. *1)* $q < 1 \implies$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*

2) $q > 1 \implies$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Теорема 3.7 (Признак Коши).

Усл. $\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n \geqslant 0, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$

Утв. *1)* $q < 1 \implies$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*

2) $q > 1 \implies$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Замечание 3.1. Признаки Даламбера и Коши ничего не говорят о случае, когда $q = 1$. В этом случае ряд может как сходиться, так и расходиться.
Например, гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, и для него $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.
С другой стороны, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 3.3 ниже), но для него также $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Замечание 3.2. Признак Коши сильнее признака Даламбера в том смысле, что если ряд удается исследовать на сходимость по признаку Даламбера ($q \neq 1$), то тот же результат можно получить и по признаку Коши. В то же время, есть ряды, для которых признак Даламбера не приводит к результату, а признак Коши позволяет исследовать сходимость.
Например, для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует, в то врямя, как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$.
Однако, во многих случаях признак Даламбера удобнее, т.к. иногда проще найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, чем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Теорема 3.8 (Интегральный признак Коши – Маклорена).

Усл. *Функция $f(x) \geqslant 0$ невозрастает на $x \geqslant m$; $a_n = f(n)$, $n \geqslant m$.*

Утв. *Ряд $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ сходится $\Longleftrightarrow$ $\int\limits_{m}^{+\infty} f(x)dx$ сходится.*

Пример 3.3. Рассморим последовательность $a_n = \frac{1}{n^p}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$. Исследуем сходимость составленного из ее членов ряда при различных $p \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

В силу интегрального признака (теорема 3.8, стр. 21), этот ряд сходится или расходится вместе с несобственным интегралом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \longrightarrow \qquad \Leftrightarrow \qquad \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \longrightarrow$$

По признаку сравнения для несобственных интегралов I-го рода, $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. Таким образом, для нашего ряда имеем:

- при $p > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится;
- при $p \leqslant 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ расходится.

В частности, получаем, что так называемый **гармонический ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad \text{расходится.}$$

Контрольные вопросы. **1)** Что называется числовым рядом, его суммой и частичной суммой? **2)** Сформулируйте критерий Коши сходимости числового ряда. **3)** Какова основная идея доказательства необходимого условия сходимости? **4)** Свойства сходящихся рядов. **5)** К какой теореме сводится доказательство I-го признака сравнения? **6)** Сформулируйте признаки Даламбера, Коши и интегральный признак. К каким рядам их можно применять?

4. Знакопеременные числовые ряды

4.1. Условная и абсолютная сходимость ряда. Признак Лейбница

Опр. 4.1. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ из модулей его членов.

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **условно сходящимся**, если

1) сам ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; **2)** ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Утверждение 4.1.

Усл. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *сходится (т.е. ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно).*

Утв. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то сходится ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. По критерию Коши, для него выполнено условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \ \forall m > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} |a_n| \right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим $\left| \sum\limits_{n=m+1}^{m+p} a_n \right|$. По свойству суммы,

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{m+p} |a_n| \equiv \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} |a_n| \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также выполнено условие критерия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \ \forall m > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \right| < \varepsilon.$$

□

Заметим, что в силу данного утверждения, каждый числовой ряд

1) либо расходится: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \not\longrightarrow$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$;

2) либо сходится условно: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \not\longrightarrow$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$;

3) либо сходится абсолютно: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

Теорема 4.1 (Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда).

Усл. *Последовательность* $\{a_n\} \searrow 0$ *монотонно стремится к нулю.*

Утв.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \longrightarrow$$

называемый ***рядом Лейбница****, сходится.*

Доказательство. Поскольку последовательность $\{a_n\} \searrow 0$ монотонно стремится к нулю, то все ее элементы a_n одного знака. Будем, для определенности, считать, что

$$a_n \geqslant 0.$$

Запишем частичную сумму с четным числом слагаемых:

$$S_{2n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\substack{\rotatebox{90}{$\geqslant$} \\ 0}} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\substack{\rotatebox{90}{$\geqslant$} \\ 0}} + \ldots + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\substack{\rotatebox{90}{$\geqslant$} \\ 0}}.$$

Очевидно, $S_{2n} = S_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geqslant S_{2n-2}$, поэтому последовательность частичных сумм S_{2n} монотонно неубывает. С другой стороны,

$$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\substack{\rotatebox{90}{$\geqslant$} \\ 0}} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\substack{\rotatebox{90}{$\geqslant$} \\ 0}} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\substack{\rotatebox{90}{$\geqslant$} \\ 0}} - a_{2n} \leqslant a_1,$$

откуда следует, что последовательность частичных сумм ограничена сверху (первым членом ряда $a_1 \geqslant 0$). Следовательно, согласно теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности (1-й семестр),

$$\exists \ S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}.$$

С другой стороны, для частичных сумм с нечетным числом слагаемых имеем:

$$S_{2n+1} = \underbrace{S_{2n}}_{\substack{\searrow \\ S}} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\substack{\searrow \\ 0}} \longrightarrow S.$$

Итак, последовательность частичных сумм состоит из 2-х подпоследовательностей S_{2n} и S_{2n+1}, обе из которых сходятся к одному и тому же пределу S. Следовательно, вся последовательность S_n имеет тот же самый предел: $S_n \longrightarrow S$. □

Пример 4.1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \ldots$$

при $p > 0$ является рядом Лейбница, т.к. последовательность $\{a_n\} = \frac{1}{n^p} \searrow 0$ монотонно стремится к нулю. По признаку Лейбница, данный ряд сходится при любом $p > 0$. При этом,

- при $p > 1$, ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ по интегральному признаку сходится, и следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ сходится абсолютно.

- при $0 < p \leqslant 1$, ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ по интегральному признаку расходится, и следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ сходится условно.

- при $p \leqslant 0$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ вообще расходится, т.к. нарушается необходимое условие сходимости ряда (теорема 3.2, стр. 18): $\quad (-1)^{n+1} a_n \not\to 0$.

Пример 4.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 + (-1)^n}{n} = -1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7} + \frac{3}{8} - \frac{1}{9} + \ldots$$

Данный ряд не является рядом Лейбница, т.к. последовательность

$$\{a_n\} = \frac{2 + (-1)^n}{n} = \left\{1, \frac{3}{2}. \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{6}, \frac{1}{7}, \frac{3}{8}, \frac{1}{9}, \ldots\right\}$$

не является монотонной, хотя и стремится к нулю. Убедимся, что данный ряд расходится. Для этого рассмотрим частичную его сумму с четным числом слагаемых:

$$S_{2n} = -1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{3}{6} - \ldots - \frac{1}{2n-1} + \frac{3}{2n} =$$

$$= \underbrace{\left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \ldots - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right)}_{\searrow\ -\ln 2} +$$

$$+ \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{\searrow\ +\infty} \longrightarrow +\infty$$

Итак, признак Лейбница нельзя усилить, выкинув требование монотонности $\{a_n\}$. Данный пример показывает, что есть ряды, для которых выполнены все условия признака Лейбница, кроме монотонности $\{a_n\}$, но которые расходятся.

Теорема 4.2 (Признак Абеля).

Усл. *1) Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ *сходится.*

2) Последовательность $\{b_n\}$ *– монотонна и ограничена.*

Утв. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Теорема 4.3 (Признак Дирихле).

Усл. *1) Последовательность* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *ограничена.*

2) Последовательность $b_n \searrow 0$ *– монотонно стремится к нулю.*

Утв. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Пример 4.3. Исследовать на сходимость ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \ \operatorname{arctg} n^3}{n}$.

а) Сначала исследуем на **абсолютную сходимость**. Рассмотрим ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$. Заметим, что поскольку $|\sin\alpha| \leqslant 1$, то $|\sin\alpha| \geqslant \sin^2\alpha$. Поэтому общий член нашего ряда из модулей оценивается снизу общим членом ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}. \tag{i}$$

Убедимся, что ряд (i) расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \left[\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2n}{n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}\right).$$

Первый ряд в скобках – гармонический, он расходится. Поэтому, если второй ряд в скобках сходящийся, то вместе с первым (гармоническим) рядом они будут давать расходящийся ряд.[2] Изучим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}. \tag{ii}$$

Пусть $a_k = \cos 2k$, а $b_n = \frac{1}{n}$. Последовательность $b_n \searrow 0$ – монотонно стремится к нулю, поэтому, чтобы применить признак Дирихле, надо убедиться, что последовательность $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ограничена. Это проверяется так:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \cos 2k = \left[\text{по формуле Эйлера}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\,2k} + e^{-i\,2k}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{i\,2k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-i\,2k} =$$

$$= \left[\text{по формуле суммы геометрической прогрессии } 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{2i(n+1)}}{1-e^{2i}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{-2i(n+1)}}{1-e^{-2i}} = \frac{\left(1-e^{2i(n+1)}\right)\left(1-e^{-2i}\right) + \left(1-e^{-2i(n+1)}\right)\left(1-e^{2i}\right)}{2\left(1-e^{2i}\right)\left(1-e^{-2i}\right)} =$$

$$= \frac{1 + e^{2in} - e^{2i(n+1)} - e^{-2i} + 1 + e^{-2in} - e^{-2i(n+1)} - e^{2i}}{2\left(2 - e^{2i} - e^{-2i}\right)} = \frac{2(1+\cos 2n - \cos(2(n+1)) - \cos 2)}{4(1-\cos 2)}.$$

Дальше упрощать выражение для A_n не нужно, т.к. видно, что скобка в числителе по модулю не превосходит 4, и уже легко оценить A_n сверху:

$$|A_n| \leqslant \frac{2}{1-\cos 2}.$$

[2] Заметим, что если бы оба ряда в скобках расходились, то из этого не следовало бы, что их разность/сумма была бы расходящимся рядом.

Поэтому, по признаку Дирихле, ряд (ii) сходится, а следовательно ряд (i) расходится. Наконец, по первому признаку сравнения (теорема 3.5, стр. 19), из расходимости ряда из меньших слагаемых следует расходимость ряда из бОльших. Поэтому исходный ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$ расходится.

Теперь, так как мы убедились, что абсолютной сходимости нет, изучим ряд на его **условную сходимость**.
Он полностью аналогичен ряду (ii), поэтому и изучение его сходимости пройдёт по той же схеме.
Пусть $a_k = \sin k$, а $b_n = \frac{1}{n}$. Последовательность $b_n \searrow 0$ – монотонно стремится к нулю, поэтому, чтобы применить признак Дирихле, надо убедиться, что последовательность $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ограничена. Это проверяется так:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \sin k = \Big[\text{по формуле Эйлера}\Big] = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\,k} - e^{-i\,k}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{i\,k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-i\,k} =$$
$$= \left[\text{по формуле суммы геометрической прогрессии } 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{-i(n+1)}}{1-e^{-2i}} = \frac{\left(1-e^{i(n+1)}\right)\left(1-e^{-i}\right) - \left(1-e^{-i(n+1)}\right)\left(1-e^{i}\right)}{2\left(1-e^{i}\right)\left(1-e^{-i}\right)} =$$
$$= \frac{1 + e^{in} - e^{i(n+1)} - e^{-i} - 1 - e^{-in} + e^{-i(n+1)} + e^{i}}{2\left(2 - e^{i} - e^{-i}\right)} = \frac{2(1 + \sin n - \sin(n+1) + \sin 1)}{4(1-\cos 1)}.$$

Дальше упрощать выражение для A_n не нужно, т.к. видно, что скобка в числителе по модулю не превосходит 4, и уже легко оценить A_n сверху:

$$|A_n| \leqslant \frac{2}{1-\cos 1}.$$

Поэтому, по признаку Дирихле, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ сходится.

Ответ: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ сходится условно.

б) Сначала исследуем на **абсолютную сходимость**. Рассмотрим ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|\ \operatorname{arctg} n^3}{n}$. Заметим, что поскольку $\operatorname{arctg} n^3 > 1$ при всех $n > 2$, то общий член нашего ряда из модулей $\frac{|\sin n|\ \operatorname{arctg} n^3}{n}$ оценивается снизу общим членом ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n},$$

который, как мы выяснили в пункте **а)**, расходится. По первому признаку сравнения (теорема 3.5, стр. 19), из расходимости ряда из меньших слагаемых следует расходимость ряда из бОльших. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|\ \operatorname{arctg} n^3}{n}$ расходится.

Теперь, так как мы убедились, что абсолютной сходимости нет, изучим ряд на его **условную сходимость**.

Чтобы применить признак Абеля, положим $a_n = \frac{\sin n}{n}$, а $b_n = \operatorname{arctg} n^3$. В силу доказанного в пункте **а)**, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ сходится. С другой стороны, последовательность $b_n = \operatorname{arctg} n^3$ монотонно возрастает и ограничена:

$$0 < b_n < \frac{\pi}{2}.$$

По признаку Абеля, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \ \operatorname{arctg} n^3}{n}$ сходится.

Ответ: Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \ \operatorname{arctg} n^3}{n}$ сходится условно.

4.2. Переместительное свойство абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана

Теорема 4.4 (Переместительное свойство абсолютно сходящегося ряда).

Усл. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно.*

Утв. *От перестановки любого (в том числе и бесконечного) количества слагаемых сумма ряда не изменится.*

Теорема 4.5 (Римана).

Усл. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно.*

Утв. *Перестановкой бесконечного количества слагаемых сумму ряда можно сделать любой от* $(-\infty)$ *до* $(+\infty)$.

Пример 4.4. Известно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

(Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно воспользоваться разложением в ряд Тейлора $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, верным при $x \in [0,\ 1]$, и положить в нем $x = 1$.)
Частичная сумма этого ряда и ее половина имеют вид:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$
$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n},$$

откуда, сложив эти равенства, получим

$$\frac{3}{2} S_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$$

Итак, мы получаем, что имеют место факты:

1) $S_n + \frac{1}{2} S_n \longrightarrow \frac{3}{2} \ln 2$;

2) ряд $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n+\frac{1}{2}S_n\right)=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2}\ln 2$ содержит в точности те же слагаемые, что и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$, но в другом порядке.
Действительно, при сложении S_n и $\frac{1}{2}S_n$ все положительные слагаемые из $\frac{1}{2}S_n$ сокращаются с соответствующими слагаемыми из S_n, а отрицательные удваиваются, компенсируя пропавшие слагаемые из S_n.

Этот пример иллюстрирует, что меняя порядок суммирования в условно сходящемся ряде, мы можем поменять его сумму.

Контрольные вопросы. **1)** Чем условная сходимость отличается от абсолютной? **2)** Следует ли из абсолютной сходимости ряда его сходимость? **3)** Какой ряд называется рядом Лейбница? **4)** Какие свойства его общего члена гарантируют его сходимость? **5)** Что может произойти при перестановке бесконечного числа слагаемых в абсолютно и в условно сходящемся ряде?

5. Функциональные последовательности и ряды

5.1. Поточечная и равномерная сходимость

Опр. 5.1. **Функциональной последовательностью** $\{f_n(x)\}_1^\infty$ называется бесконечное занумерованное множество функций

$$\{f_n(x)\}_1^\infty=\{f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots\}$$

Пределом функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_1^\infty$ на множестве M называется функция $F(x)$ такая, что равенство $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ выполнено в каждой точке $x\in M$, т.е.

$$\forall x\in M\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}:\ \ \forall n>N\quad |f_n(x)-F(x)|<\varepsilon.$$

Функциональным рядом называется выражение $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$.

n-ной частичной суммой S_n функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ называется функция

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x).$$

Суммой S функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ называется функция – предел его частичных сумм:

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x),$$

если такой предел существует во всех точках некоторого множества M.
Само множество M называется **областью (поточечной) сходимости ряда,** а ряд – **сходящимся на M**, при этом пишут $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x),\quad x\in M$.

Пример 5.1. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$ на отрезке $x\in[0,\ 1]$. Исследуем ее сходимость в точках $[0,\ 1]$. Фиксируем произвольный $x\in(0,\ 1]$. Для него

имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$. Осталось рассмотреть точку $x = 0$. Для нее $f_n(0) \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x \in (0,\ 1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Пример 5.2. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = x^n$ на множестве $x \in \mathbb{R}$. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Фиксируем произвольный $x \in \mathbb{R}$. Для него имеем: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ – числовой ряд, причем при $|x| \geqslant 1$ ряд расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости: $x^n \not\to 0$ при $n \to \infty$. Осталось рассмотреть точки $|x| < 1$.

Для $-1 < x < 0$ числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ является рядом Лейбница, следовательно сходится, в точке $x = 0$ все частичные суммы ряда равны нулю, следовательно, в $x = 0$ ряд сходится к нулю. Для $0 < x < 1$ наш числовой ряд – геометрический, поэтому сходится. Чтобы выяснить, к какой функции сходится функциональный ряд на $|x| < 1$, вспомним формулу $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ суммы геометрической прогрессии, подставим в нее $q = x$ и перейдем к пределу при $n \to \infty$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

Полученным результатом можно воспользоваться для получения более общей формулы: если мы положим $x = y - a$, где $a \in \mathbb{R}$ – произвольная точка, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} (y-a)^n = \frac{1}{1-(y-a)}, \qquad |y-a| < 1.$$

Опр. 5.2. **Последовательность $\{f_n(x)\}$** мы будем называть **равномерно сходящейся на множестве X к функции $F(x)$** (это обозначается $f_n(x) \overset{x\in X}{\rightrightarrows} F(x)$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \ \forall n > N \ \ \forall x \in X \quad |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ мы будем называть **равномерно сходящимся на множестве X к функции $S(x)$** (обозначается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{x\in X}{\rightrightarrows} S(x)$), если последовательность частичных сумм сходится к $S(x)$ равномерно на X, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \ \forall n > N \ \ \forall x \in X \quad \left| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) - S(x) \right| < \varepsilon.$$

Пример 5.3. Как мы выяснили в примере 5.1 (стр. 28),

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x \in (0,\ 1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Теперь выясним, является ли данная сходимость равномерной на $[0,\ 1]$. Заметим, что все функции данной последовательности непрерывны, а предельная функция имеет в точке $x = 0$ разрыв. Это вызывает подозрение, что равномерной сходимости нет (на самом деле, следствие 5.2 (стр. 33), из теоремы 5.3 гарантирует, что равномерной сходимости в таком случае быть не может). Убедимся в этом. Запишем отрицание определения равномерной сходимости:

$$\exists\ \varepsilon > 0: \quad \forall N \in \mathbb{N}\ \ \exists n > N\ \ \exists x_n \in X: \qquad |f_n(x_n) - F(x_n)| \geqslant \varepsilon.$$

Распишем последнее неравенство для $x_n = \frac{1}{2^n} \to 0$:

$$|f_n(x_n) - F(x_n)| = |\sqrt[n]{x_n} - 1| = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \geqslant \varepsilon$$

Таким образом, для $\varepsilon = \frac{1}{3}$ и любого $N \in \mathbb{N}$ можно указать $n > N$, например, $n = N + 1$ и $x_n = \frac{1}{2^n}$ такие, что $|f_n(x_n) - F(x_n)| = |\sqrt[n]{x_n} - 1| = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \geqslant \varepsilon = \frac{1}{3}$, то есть выполнено определение отрицания равномерной сходимости.

Пример 5.4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

а) на промежутке $[0,\ 1)$;

б) на промежутке $[0,\ 1-\alpha]$ для произвольного $\alpha \in (0,\ 1)$.

Как мы выяснили в примере 5.2,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

а) Аналогично примеру 5.3 разрывность предельной функции в точке $x = 1$ вызывает подозрение, что равномерной сходимости на промежутке $[0,\ 1)$ нет. Убедимся в этом. Запишем отрицание определения равномерной сходимости:

$$\exists \varepsilon > 0: \quad \forall N \in \mathbb{N}\ \ \exists n > N\ \ \exists x_n \in X: \qquad \left|\sum_{i=0}^{n} f_i(x_n) - S(x_n)\right| \geqslant \varepsilon.$$

Распишем последнее неравенство для $x_n = \sqrt[n+1]{\frac{1}{2}} \to 1$:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} f_i(x_n) - S(x_n)\right| = \left|\sum_{i=0}^{n} x_n^n - \frac{1}{1-x_n}\right| = \left|\frac{1-x_n^{n+1}}{1-x_n} - \frac{1}{1-x_n}\right| = \frac{x_n^{n+1}}{1-x_n} >$$

$$> x_n^{n+1} = \frac{1}{2} \geqslant \varepsilon$$

Таким образом, для $\varepsilon = \frac{1}{3}$ и любого $N \in \mathbb{N}$ можно указать $n > N$ (например, $n = N + 1$) и $x_n = \sqrt[n+1]{\frac{1}{2}}$ такие, что $\left|\sum\limits_{i=0}^{n} f_i(x_n) - S(x_n)\right| = \frac{x_n^{n+1}}{1-x_n} > x_n^{n+1} = = \frac{1}{2} \geqslant \varepsilon = \frac{1}{3}$, то есть выполнено определение отрицания равномерной сходимости ряда на $[0,\ 1)$.

б) В отличие от пункта **а)**, сумма ряда непрерывна в рассматриваемой области, включая граничные точки. Проверим наличие равномерной сходимости на промежутке $[0,\ 1-\alpha]$. Запишем определения равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N\ \ \forall x \in X \qquad \left|\sum_{i=0}^{n} f_i(x) - S(x)\right| < \varepsilon.$$

Распишем последнее неравенство:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} f_i(x) - S(x)\right| = \left|\sum_{i=0}^{n} x^n - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \frac{x^{n+1}}{1-x} <$$

$$< \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{1-(1-\alpha)} = \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} < \varepsilon$$

Таким образом, чтобы выполнялось последнее неравенство, нам достаточно для произвольного $\varepsilon > 0$ взять номер $N = \left[\frac{\ln(\alpha\varepsilon)}{\ln(1-\alpha)}\right] + 1$, чтобы для любого $n > N$ и произвольной точки $x \in [0,\ 1-\alpha]$ выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{i=0}^{n} f_i(x) - S(x)\right| < \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} < \frac{(1-\alpha)^{\left[\frac{\ln(\alpha\varepsilon)}{\ln(1-\alpha)}\right]+2}}{\alpha} \leqslant (1-\alpha)\cdot\frac{\alpha\varepsilon}{\alpha} < \varepsilon,$$

то есть выполнено определение равномерной сходимости ряда на промежутке $[0,\ 1-\alpha]$.

5.2. Критерий Коши и признак Вейерштрасса

Теорема 5.1 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда).
Утв. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1} f_i(x)$ *сходится равномерно на множестве* X

$$\iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)\right| < \varepsilon.$$

Теорема 5.2 (Признак Вейерштрасса).
Усл. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ |f_n(x)| \leqslant c_n$ *и числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *сходится.*

Утв. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* X.

Доказательство. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то по критерию Коши для числовых рядов (стр. 18),

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall p \in N\ \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} c_i\right| < \varepsilon.$$

Это означает, в силу неравенства $0 \leqslant |f_i(x)| \leqslant c_i$, что для того же $N(\varepsilon)$

$$\forall x \in X\ \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)\right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+p} |f_i(x)| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i < \varepsilon,$$

откуда по критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X, то есть

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall x \in X\ \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)\right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Следствие 5.1 (Необходимое условие равномерной сходимости).

Усл. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{x\in X}{\rightrightarrows}$ *сходится равномерно на* X.

Утв. *Функциональная последовательность* $f_n(x) \overset{x\in X}{\rightrightarrows} 0$.

Доказательство. Напишем условие критерия Коши равномерной сходимости ряда и возьмем в нем $p = 1$:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \;\; \forall n > N \;\; \text{для} \;\; p = 1, \;\; \forall x \in X \;\; \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)\right| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство при $p = 1$ имеет вид: $|f_{n+1}| < \varepsilon$. То есть, из критерия Коши следует:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \;\; \forall n > N \;\; \forall x \in X \;\; |f_{n+1}(x)| < \varepsilon.$$

Но эта формула является определением равномерной на множестве X сходимости функциональной последовательности $\{f_n\}$ к функции, равной тождественному нулю. □

Пример 5.5. Исследуем на равномерную сходимость функциональный ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\sqrt[n]{ax^2+bx+c}\right)}{n^2}$ на промежутке $x \in (-\infty, \; +\infty)$. Легко заметить, что $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\left|\frac{\cos\left(\sqrt[n]{ax^2+bx+c}\right)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (по интегральному признаку), то признак Вейерштрасса гарантирует нам, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\sqrt[n]{ax^2+bx+c}\right)}{n^2}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ (независимо от значений параметров a, b и c).

Пример 5.6. Исследуем на равномерную сходимость функциональный ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n+2}$ на промежутке $x \in (0, \; 1)$.
Проверим, что функциональная поледовательность $\frac{x^n}{x^n+2}$ не сходится к тождественному нулю равномерно на $(0, \; 1)$ (то есть сходится, но не равномерно).
Рассмотрим $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. В этих точках:

$$f_n(x_n) = \frac{x_n^n}{x_n^n + 2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{1}{5}.$$

Поэтому выполнено отрицание определения равномерной на $(0, \; 1)$ сходимости $f_n(x)$ к тождественному нулю:

$$\exists\varepsilon = \frac{1}{10} > 0: \;\; \forall N \in \mathbb{N} \;\; \exists n = N + 1 > N \;\; \exists x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in (0, \; 1):$$
$$|f_n(x_n) - F(x_n)| \equiv \left|\frac{1}{5} - 0\right| = \frac{1}{5} \geqslant \frac{1}{10} = \varepsilon.$$

По следствию 5.1 получаем, что, раз не выполнено необходимое условие равномерной сходимости ряда на $(0, \; 1)$, то равномерной сходимости данного ряда на этом множестве нет.

5.3. Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 5.3 (Почленный переход к пределу).

Усл. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* X *к сумме* $S(x)$ $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{x\in X}{\rightrightarrows} S(x))$, *при этом в точке* $a \in \overline{X}$ $\quad \exists \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b_n$.

Утв.

$$\exists \lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

то есть в этом случае операции взятия предела в точке a *и суммирования ряда можно переставлять.*

Следствие 5.2 (О непрерывности суммы).

Усл. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* X *к сумме* $S(x)$ $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{x\in X}{\rightrightarrows} S(x))$, *при этом функции* $f_n(x)$ *непрерывны в точке* $a \in X$.

Утв. $S(x)$ *непрерывна в точке* a.

Доказательство. Пусть функции $f_n(x)$ непрерывны в точке $a \in X$. Это означает, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists \lim_{x\to a} f_n(x) = b_n = f_n(a).$$

По теореме 5.3 о почленном переходе к пределу в равномерно сходящихся рядах, получим:

$$\exists \lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(a) \equiv S(a),$$

то есть, функция $S(x)$ непрерывна в точке a. $\square$

Теорема 5.4 (Почленное интегрирование).

Усл. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на отрезке* $[a,\ b]$ *к сумме* $S(x)$, *при этом каждая из функций* $f_n(x)$ *интегрируема по Риману на* $[a,\ b]$.

Утв. $S(x)$ *интегрируема по Риману на* $[a,\ b]$ *и*

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx,$$

то есть в этом случае операции интегрирования по $[a,\ b]$ *и суммирования ряда можно переставлять.*

Теорема 5.5 (Почленное дифференцирование).

Усл. *Все функции $f_n(x)$ имеют производные на $[a,\ b]$ и*

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $c \in [a,\ b]$;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно на $[a,\ b]$.

Утв. *1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $[a,\ b]$ к некоторой функции $S(x)$;*

2) $\exists S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

Замечание 5.1. Приведенные свойства равномерно сходящихся рядов говорят о том, что такие ряды очень удобны в обращении: с ними можно почленно выполнять самые важные операции: переход к пределу, интегрирование и дифференцирование, поэтому если удается найти класс рядов, которые сходятся равномерно, то этот класс становится удобным инструментом математического исследования. Такие классы (степенные ряды (и, в частности, ряд Тейлора) и ряды Фурье) мы опишем в следующих параграфах.

Замечание 5.2. Теоремы о свойствах равномерно сходящихся рядов переписываются с соответствующими изменениями для равномерно сходящихся фукнциональных последовательностей.

Контрольные вопросы. **1)** Что такое функциональная последовательность и функциональный ряд? **2)** Чем поточечная сходимость ряда отличается от равномерной? **3)** Сформулируйте признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда. **4)** Какова основная идея доказательства необходимого условия равномерной сходимости ряда? **5)** Какие операции можно производить почленно с равномерно сходящимися рядами?

© Д.С. Ткаченко

6. Степенные ряды

6.1. Понятие степенного ряда. Формула Коши – Адамара

Опр. 6.1. **Степенным рядом** называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

где числа $a_n \in \mathbb{R}$ – коэффициенты ряда.

Теорема 6.1 (Коши – Адамара).

Усл. *Существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}, \qquad \textit{(формула Коши – Адамара)}$$

(здесь $R \in [+0,\ +\infty]$ – либо неотрицательное число, либо $+\infty$.)

Утв. *Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится (абсолютно) на интервале $x \in (-R,\ R)$ и расходится при $|x| > R$.*
*Число R называется **радиусом сходимости**, а промежуток $(-R,\ R)$ – **интервалом сходимости** ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*

Доказательство. **Сходимость на промежутке $(-R,\ R)$.** Рассмотрим произвольную точку x_1 внутри промежутка $(-R,\ R)$:

$$|x_1| < R.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x_1|^n$ является знакопостоянным рядом с действительными членами. Корень степени n из выражения $|a_n| \cdot |x_1|^n$ сремится при $n \to \infty$ к числу, меньшему единицы:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x_1| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{|x_1|}{R} < 1. \tag{6.1}$$

Поэтому, по признаку Коши (стр. 20) о сходимости числовых рядов с неотрицательными членами, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x_1|^n$ сходится. Точку x_1 мы выбрали произвольно внутри промежутка $(-R,\ R)$, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ сходится, причём абсолютно, всюду в $(-R,\ R)$.

Расходимость вне круга. Общий член ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ в точке $|x| > R$ не стремится к нулю, так как:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n\, x^n|} = \frac{|x|}{R} > 1. \tag{6.2}$$

Таким образом, в области $|x| > R$ нарушено необходимое условие сходимости функционального ряда (следствие 5.1, стр. 32). □

Замечание 6.1. Говоря, что $R \in [+0,\ +\infty]$, полагают, что $\frac{1}{+0} = +\infty$, а $\frac{1}{+\infty} = 0$.
Таким образом, теорема Коши – Адамара гарантирует, что областью сходимости любого степенного ряда является интервал $(-R,\ R)$ (и, возможно, точки его границы $x = \pm R$), а вне промежутка $[-R,\ R]$ ряд расходится. При этом сам промежуток может вырождаться в точку $x = 0$ при $R = 0$, либо покрывать всю числовую прямую при $R = +\infty$.
Заметим, что в точке $x = 0$ любой степенной ряд сходится к числу a_0. При этом есть ряды, которые сходятся только в точке $x = 0$, например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Замечание 6.2. Есть другая формула для вычисления радиуса сходимости:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}. \tag{6.3}$$

В некоторых случаях ей пользоваться удобнее.

Пример 6.1. Рассморим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^p x^n$. Исследуем его сходимость. По формуле Коши – Адамара имеем: $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p}} = \frac{1}{1} = 1\ \ \forall p \in \mathbb{R}$. Таким образом, ряд сходится абсолютно на $(-1,\ 1)$ и расходится при $|x| > 1$.
Осталось исследовать точки $|x| = 1$.
В точке $x = -1$ ряд превращается в числовой ряд вида: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^p(-1)^n$. При $p \geqslant 0$ нарушается необходимое условие сходимости числового ряда (общий член не стремится к нулю), поэтому ряд расходится. При $p < 0$ наш числовой ряд представляет собой ряд Лейбница, следовательно, сходится, причем при $p < -1$ он сходится абсолютно (по интегральному признаку, стр. 21).
В точке $x = 1$ ряд превращается в числовой ряд вида: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^p$. По интегральному признаку, при $p \geqslant -1$ ряд расходится, а при $p < -1$ сходится. Итак,
Ответ: Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^p x^n$

при $p < -1$ $\begin{cases} \text{абсолютно сходится при } x \in [-1,\ 1]; \\ \text{расходится при } x \in (-\infty,\ -1) \cup (1,\ +\infty), \end{cases}$

при $p \in (-1,\ 0)$ $\begin{cases} \text{абсолютно сходится при } x \in (-1,\ 1); \\ \text{условно сходится при } x = -1; \\ \text{расходится при } x \in (-\infty,\ -1) \cup [1,\ +\infty), \end{cases}$

при $p \geqslant 0$ $\begin{cases} \text{абсолютно сходится при } x \in (-1,\ 1); \\ \text{расходится при } x \in (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty). \end{cases}$

6.2. Свойства степенных рядов

Теорема 6.2.
Усл. *R – радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*
Утв. *$\forall r \in (0,\ R)$ ряд сходится равномерно на $[-r,\ r]$.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $r \in (0,\ R)$.
Так как $\forall\, n \geqslant 1$ и $\forall\, x \in [-r,\ r]$

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n,$$

то на $[-r,\ r]$ степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ мажорируется числовым рядом $|a_0| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$. Указанный числовой ряд сходится, поскольку точка $r \in [0,\ R)$ лежит в интервале абсолютной(!) сходимости.
Применим признак Вейерштрасса (стр. 31), и теорема доказана. □

Далее в силу равномерной сходимости степенного ряда на любом сегменте, лежащем внутри интервала сходимости, для степенного ряда выполнены все свойства равномерно сходящихся рядов:

Теорема 6.3 (Непрерывность суммы).

Усл. *R – радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*

Утв. *$\forall r \in (0,\ R)$ сумма ряда $S(x)$ непрерывна на $[-r,\ r]$.*

Доказательство. Так как все функции $f_n(x) = a_n x^n$ непрерывны на $\mathbb{R}$ и, следовательно, на $[-r,\ r]$, то по следствию из теоремы о почленном переходе к пределу в равномерно сходящемся ряде, сумма ряда непрерывна на $[-r,\ r]$. □

Теорема 6.4 (Почленное интегрирование).

Усл. *R – радиус сходимости степенного ряда $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*

Утв. *$\forall r \in (0,\ R)$ $S(x)$ интегрируема по Риману на $[-r,\ r]$ и*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{\alpha}^{\beta} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_{x=\alpha}^{x=\beta}, \quad \forall\ [\alpha, \beta] \subset (-r, r), \tag{6.4}$$

то есть степенной ряд можно почленно интегрировать.
В частности, если взять $x \in (0,\ R)$ и проинтегрировать ряд по промежутку $[0,\ x]$, по свойству интеграла с переменным верхним пределом получим

$$\int\limits_{0}^{x} S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots, \tag{6.5}$$

при этом полученный ряд имеет тот же радиус сходимости R.

Доказательство. В силу теоремы 6.2, исходный ряд сходится равномерно на $[-r,\ r]$ при произвольном $r \in (0,\ R)$. Поэтому для любого $x \in (0,\ R)$ этот ряд равномерно сходится на $[0,\ x]$. Применим теорему 5.4 (стр. 33) о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда и получим, что имеют место равенства (6.4) и (6.5).

Так как ряд (6.5) является степенным, то его радиус сходимости R_{int} можно найти по формуле Коши-Адамара (стр. 35):

$$\frac{1}{R_{int}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}{1} = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, радиус сходимости ряда не меняется при интегрировании:

$$R_{int} = R.$$

□

Теорема 6.5 (Почленное дифференцирование).

Усл. *R – радиус сходимости степенного ряда $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*

Утв. *Внутри интервала $(-R,\ R)$ ряд можно почленно дифференцировать, то есть*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots, \tag{6.6}$$

при этом полученный ряд имеет тот же радиус сходимости R.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 6.4, так как ряд (6.6) является степенным, то его радиус сходимости R_{dif} можно найти по формуле Коши-Адамара (стр. 35):

$$\frac{1}{R_{dif}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, радиус сходимости ряда не меняется при дифференцировании:

$$R_{dif} = R.$$

В силу теоремы 6.2 (стр. 36), ряд (6.6) сходится равномерно на $[-r,\ r]$ при произвольном $r \in (0,\ R)$. Поскольку для любого $x \in (-R,\ R)$ найдется r такой, что $x \in [-r,\ r] \subset (-R,\ R)$, то по теореме 5.5 (стр. 34) о почленном дифференцировании ряда получим, что в каждой точке $x \in (-R,\ R)$ имеет место равенство (6.5). □

6.3. Ряд Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(-R,\ R)$ (непрерывные) производные любого порядка.

Опр. 6.2. **Ряд** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, где $c_n = \frac{f^n(0)}{n!}$ мы будем называть **рядом Тейлора функции** $f(x)$. (Считают по определению, что $0! = 1$.)

Во многих случаях ряд Тейлора сходится на своем интервале сходимости к функции $f(x)$, то есть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n.$$

К таким функциям относятся все элементарные функции – полиномы, e^x, $\sin x$, $\cos x$ и т.п. Однако, есть примеры функций, чей ряд Тейлора сходится не к этим функциям. Например,

так как все производные функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$ в точке $x = 0$ равны нулю, то ее ряд Тейлора сходится на $\mathbb{R}$ к функции, равной тождественному нулю.

Теорема 6.6 (Единственность разложения).

Усл. *$f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке $x = 0$. Внутри $(-R,\ R)$ имеет место равенство $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.*

Утв. $c_n = \frac{f^n(0)}{n!}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad x \in (-R,\ R). \tag{6.7}$$

По теореме 6.4 о почленном дифференцировании ряд (6.7) можно почленно дифференцировать любое число раз внутри интервала $(-R,\ R)$. Проделаем это:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$
$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2},$$
$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) c_n x^{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) c_n x^{n-k},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Теперь подставим в полученные равенства $x = 0$ (по теореме 6.3 о непрерывности суммы степенного ряда (стр. 37) мы имеем право подставить $x = 0$ в выражения под знаком ряда). Получим:

$$f(0) = c_0,$$
$$f'(0) = 1 \cdot c_1,$$
$$f''(0) = 1 \cdot 2 \cdot c_2,$$
$$f'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^k(0) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot c_k = k! \cdot c_k,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда для коэффициентов c_n ряда (6.7) имеем равенство:

$$c_n = \frac{f^n(0)}{n!}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.8}$$

Таким образом, если функция имеет производные любого порядка и разлагается в степенной ряд в $(-R,\ R)$, то коэффициенты этого ряда определяются единственным образом по формуле (6.8) $\square$

6.4. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Поскольку $\frac{d^n e^x}{dx^n}\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = 1$, то для экспоненты все коэффициенты $c_n = \frac{1}{n!}$, поэтому, по определению ряда Тейлора (стр 38):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in (-\infty,\ +\infty).$$

Здесь $x \in (-\infty,\ +\infty)$, поскольку радиус сходимости по формуле (6.3)

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}} = +\infty.$$

Аналогично, для функций $\sin x,\ \cos x,\ \ln(1+x),\ (1+x)^\alpha$ имеем разложения:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty,\ +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty,\ +\infty);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-1,\ 1];$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \quad x \in (-1,\ 1).$$

Пример 6.2. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \frac{1}{(1-x)(2+x)}$. В первую очередь представим (методом неопределенных коэффициентов) данную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2+x}\right).$$

Для $\frac{1}{1-x}$ известно разложение – геометрический ряд (оно получено в примере 5.2, стр. 29):

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad x \in (-1,\ 1). \tag{6.9}$$

Преобразуем вторую дробь: $\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})} = \left[y = -\frac{x}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-y}$. Для последней дроби воспользуемся вновь разложением в геометрический ряд:

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n, \quad y \in (-1,\ 1).$$

Таким образом, для второй дроби имеет место равенство:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n, \qquad \frac{x}{2} \in (-1,\ 1). \tag{6.10}$$

Заметим, что формулы (6.9) и (6.10) верны на общей части интервалов сходимости, то есть на интервале $x \in (-1,\ 1)$. На этом промежутке мы имеем право складывать эти ряды почленно. В результате получим:

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}\right)x^n.$$

Пример 6.3 (Разложение логарифма)**.**
Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \ln(1+x)$. Заметим, что

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \Big[y = -x\Big] = \frac{1}{1-y} = \sum_{i=0}^{\infty} y^n = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \qquad |x| < 1.$$

Проинтегрируем равенство

$$(\ln(1+t))' = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

по промежутку $t \in [0,\ x]$ при $|x| < 1$ (т.е. по интервалу, на котором это равенство имеет место):

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \Big[k = n+1\Big] = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}.$$

Таким образом, мы получили в точности то разложение, которое приведено выше. (Поскольку $\forall k \in \mathbb{Z} \qquad (-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$.)

Пример 6.4 (Разложение гиперболического косинуса)**.**
Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \operatorname{ch} x$. По определнию,

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}x^n.$$

Теперь заметим, что

$$1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{когда} \quad n - \quad \text{четное;} \\ 0 & \text{когда} \quad n - \quad \text{нечетное.} \end{cases}$$

Тогда все слагаемые ряда, у которых нечетные номера, пропадут, и останутся только слагаемые с четными номерами. В таких случаях для удобства записи вводят новый индекс суммирования. Введем $k = n/2$. Получим:

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Замечание 6.3. Понятие степенного ряда иногда вводят в более общем смысле, а именно, называют степенным рядом ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n. \tag{6.11}$$

Тогда точку a называют **центром ряда** (6.11), а интервал сходимости имеет вид $(a-R,\ a+R)$, где R – радиус сходимости, определяемый по формуле Коши – Адамара.

Контрольные вопросы. **1)** Какой вид имеет общий член степенного ряда? **2)** Приведите формулу Коши – Адамара. **3)** Что такое радиус сходимости? **4)** На каком свойстве степенных рядов основаны теоремы об их почленном интегрировании, дифференцировании и непрерывности их суммы? **5)** Какой степенной ряд называется рядом Тейлора? **6)** Какова идея доказательства теоремы о единственности разложения функции в степенной ряд? **7)** Приведите формулы разложения в ряд Тейлора функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$. Каковы их интервалы сходимости?

© Д.С. Ткаченко