

Содержание

1. Ряды Фурье	2
1.1. Скалярное произведение. Ортонормированные системы	2
1.1.1. Ортонормированность тригонометрической системы	2
1.2. Тригонометрический ряд Фурье	3
1.3. Ряд Фурье для четных и нечетных функций	5
1.4. Разложение в ряд Фурье по синусам и по косинусам	7
1.5. Тригонометрический ряд Фурье на промежутке $[-l, l]$	8
Контрольные вопросы	9
2. Интеграл Фурье	10
2.1. Представление функции интегралом Фурье	10
2.2. Интеграл Фурье от чётных и нечётных функций	12
2.3. Примеры на интеграл Фурье	13
3. Преобразование Фурье	17
3.1. Начальные сведения о комплексных числах	17
3.2. Преобразование Фурье и интеграл Фурье	18
3.3. Свойства преобразования Фурье	20
3.4. Косинус–преобразование и синус–преобразование Фурье	23
3.5. Примеры на преобразование Фурье	24
4. Дополнение: преобразование Фурье в уравнениях математической физики	27
4.1. Задача Коши для однородного уравнения теплопроводности	27
4.2. Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности	28
5. Дополнение: приложения рядов	30
5.1. Ряд Тейлора для решения дифференциального уравнения	30
5.2. Ряды Фурье в задачах математической физики	31
5.3. Ряд Фурье для аппроксимации изображений	33
5.3.1. Эффект Гиббса	37
5.3.2. Формат <i>jpeg</i> и эффект Гиббса	39
5.3.3. Быстрое преобразование Фурье	41
5.3.4. Подавление эффекта Гиббса	42
Список рекомендуемой литературы	46

1. Ряды Фурье

1.1. Скалярное произведение. Ортонормированные системы

Рассмотрим множество всех функций, непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$, за исключением, быть может, конечного числа точек x_i разрыва I-го рода, в каждой из которых выполнено равенство

$$f(x_i) = \frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}.$$

(Заметим, что в точках непрерывности функции $f(x)$ это равенство автоматически выполняется.)

Указанное множество функций мы будем обозначать $QC[-\pi, \pi]$.

Опр. 1.1. Скалярным произведением пары f и g элементов $QC[-\pi, \pi]$ назовем число

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Опр. 1.2. Функции f и g из $QC[-\pi, \pi]$ мы будем называть **ортогональными**, если

$$(f, g) = 0.$$

Опр. 1.3. Систему функций $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $QC[-\pi, \pi]$ мы будем называть **ортонормированной системой**, если

$$(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases}.$$

1.1.1. Ортонормированность тригонометрической системы

Весьма важную роль играет так называемая **тригонометрическая система функций**:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Проверим ее ортонормированность. Для этого достаточно убедиться, что

$$(1, \sin nx) = (1, \cos nx) = (\sin nx, \cos kx) = 0 \text{ при всех } k \text{ и } n,$$

$$(\sin kx, \sin nx) = (\cos kx, \cos nx) = 0 \text{ при } k \neq n, \text{ и}$$

$$(1, 1) = 2\pi, \quad (\cos nx, \cos nx) = (\sin nx, \sin nx) = \pi$$

в смысле скалярного произведения из определения 1.1.

$$(1, 1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx = x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi;$$

$$(1, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = \frac{-\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}(\cos(-\pi nx) - \cos(\pi nx)) = 0;$$

$$(1, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}(\sin(\pi nx) - \sin(-\pi nx)) = 0;$$

$$\begin{aligned} (\sin nx, \cos kx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nx - kx) + \sin(nx + kx)) dx = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos(n-k)x}{n-k} + \frac{-\cos(n+k)x}{n+k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{при } n \neq k, \\ \frac{1}{2} \left(0 + \frac{-\cos(2nx)}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{при } n = k; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sin nx, \sin kx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx - kx) - \cos(nx + kx)) dx = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n-k)x}{n-k} - \frac{\sin(n+k)x}{n+k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{при } n \neq k, \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin(2nx)}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi & \text{при } n = k; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cos nx, \cos kx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx - kx) + \cos(nx + kx)) dx = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n-k)x}{n-k} + \frac{\sin(n+k)x}{n+k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{при } n \neq k, \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin(2nx)}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi & \text{при } n = k. \end{cases} \end{aligned}$$

1.2. Тригонометрический ряд Фурье

Опр. 1.4. Тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ из множества $QC[-\pi, \pi]$ называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Теорема 1.1 (Сумма ряда Фурье).

Усл. $f(x), f'(x) \in QC[-\pi, \pi]$.

Утв. 1) Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ на $(-\pi, \pi)$, при этом на любом отрезке $[a, b] \subset (-\pi, \pi)$, не содержащем точек разрыва $f(x)$, этот ряд сходится равномерно.
 2) Вне отрезка $[-\pi, \pi]$ ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ее 2π -периодическому продолжению, то есть к функции, определенной по закону:

$$F(x) = f(x - 2\pi k) \quad \text{на каждом интервале } ((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При этом во всех точках x_i разрыва $F(x)$ ряд Фурье сходится к

$$\frac{F(x_i - 0) + F(x_i + 0)}{2}.$$

Следствие 1.1.

Усл. $f(x), f'(x) \in QC[-\pi, \pi]$.

Утв. Ряд Фурье можно почленно интегрировать на любом отрезке $[a, b] \subset (-\pi, \pi)$, не содержащем точек разрыва $f(x)$.

Следствие 1.2.

Усл. $f(x), f'(x), f''(x) \in QC[-\pi, \pi]$.

Утв. Ряд Фурье можно почленно дифференцировать на любом отрезке $[a, b] \subset (-\pi, \pi)$, не содержащем точек разрыва $f(x)$ и $f'(x)$. Полученный ряд

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$$

будет рядом Фурье функции $f'(x)$ и будет сходиться к ней равномерно на $[a, b] \subset (-\pi, \pi)$.

Доказательство. Эти следствия получаются применением теорем о почленном интегрировании и дифференцировании равномерно сходящихся рядов (теоремы 5.4 и 5.5, стр. 33-34 файла 2semVf3.pdf) и теоремы 1.1 (стр. 4) к заданному ряду Фурье. \square

Пример 1.1. Разложить в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x) = e^{\alpha x}$ и нарисовать график суммы ряда.

Запишем формулы для определения коэффициентов a_n и b_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} \sin nx dx.$$

Интегралы $I_1 = \int e^{\alpha x} \cos nx dx$ и $I_2 = \int e^{\alpha x} \sin nx dx$ берутся при помощи двукратного интегрирования по частям:

$$I_1 = \int e^{\alpha x} \cos nx dx = \frac{e^{\alpha x} \cos nx}{\alpha} + \frac{n}{\alpha} \int e^{\alpha x} \sin nx dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x} \cos nx}{\alpha} + \frac{n}{\alpha} \left(\frac{e^{\alpha x} \sin nx}{\alpha} - \frac{n}{\alpha} \int e^{\alpha x} \cos nx dx \right) = \frac{\alpha e^{\alpha x} \cos nx + n e^{\alpha x} \sin nx}{\alpha^2} - \frac{n^2}{\alpha^2} I_1, \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{n^2}{\alpha^2} \right) I_1 = \frac{\alpha e^{\alpha x} \cos nx + n e^{\alpha x} \sin nx}{\alpha^2} + c, \Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{\alpha e^{\alpha x} \cos nx + n e^{\alpha x} \sin nx}{\alpha^2 + n^2} + c, \text{ аналогично, } I_2 = \frac{\alpha e^{\alpha x} \sin nx - n e^{\alpha x} \cos nx}{\alpha^2 + n^2} + c. \quad (1.1)$$

(Эти интегралы можно также взять при помощи формул Эйлера $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ и $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.)

Теперь найдем a_n и b_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} I_1 \Big|_{-\pi}^{\pi} = \left[\begin{array}{l} \cos(\pm\pi n) = (-1)^n \\ \sin(\pm\pi n) = 0 \end{array} \right] = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + n^2)} (-1)^n (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) = \frac{2(-1)^n \alpha \operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 + n^2)},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} I_2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{n}{\pi(\alpha^2 + n^2)} (-1)^{n+1} (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) = \frac{2(-1)^{n+1} n \operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 + n^2)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

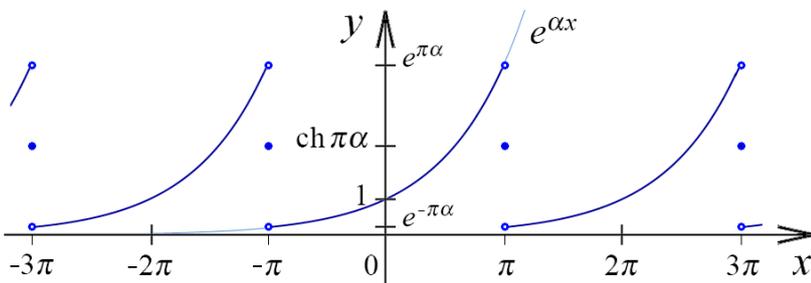
Важно заметить, что коэффициент a_0 всегда надо искать отдельно:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\pi\alpha} e^{\alpha x} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi\alpha} \cdot \frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2} = \frac{2 \operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi\alpha}.$$

В результате для функции $f(x) = e^{\alpha x}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеем разложение:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi\alpha} + \frac{2 \operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} (\alpha \cos nx - n \sin nx).$$

Поскольку, по теореме 1.1, данный ряд внутри интервала $(-\pi, \pi)$ сходится к функции $f(x) = e^{\alpha x}$, а вне $[-\pi, \pi]$ – к ее периодическому продолжению $F(x)$ с периодом 2π , то график суммы ряда Фурье – это график 2π -периодической функции, которая на промежутке $(-\pi, \pi)$ совпадает с $e^{\alpha x}$.



Наш рисунок соответствует случаю, когда $\alpha > 0$. При этом значения функции на концах промежутка $[-\pi, \pi]$ не совпадают: $f(-\pi + 0) = e^{-\alpha\pi}$, в то время как $f(\pi - 0) = e^{\alpha\pi}$, поэтому ее периодическое продолжение $F(x)$ имеет разрывы во всех точках вида

$\pi \pm 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. В таких точках ряд Фурье, как гарантирует теорема 1.1, сходится к среднему арифметическому пределов $F(x)$ слева с справа. (В данном случае это будет число $\operatorname{ch} \alpha\pi = \frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{2}$.)

1.3. Ряд Фурье для четных и нечетных функций

Напомним понятия четной и нечетной функции. Пусть функция $f(x)$ определена на симметричном относительно точки 0 множестве X . Это означает, что если точка x принадлежит

множеству X , то и точка $-x \in X$.

Опр. 1.5. Функция $f(x)$, определенная на симметричном относительно нуля множестве X , называется **четной**, если

$$\forall x \in X \quad f(-x) = f(x).$$

Функция $f(x)$, определенная на симметричном относительно нуля множестве X , называется **нечетной**, если

$$\forall x \in X \quad f(-x) = -f(x).$$

При этом график четной функции симметричен относительно оси Oy , а график нечетной функции симметричен относительно точки $O(0, 0)$.

Утверждение 1.1.

1) $f(x) \in QC[-\pi, \pi]$ – четная на $[-\pi, \pi]$ функция \Rightarrow

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx;$$

2) $f(x) \in QC[-\pi, \pi]$ – нечетная на $[-\pi, \pi]$ функция \Rightarrow

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Доказательство. Докажем, для примера, пункт 2). Пусть $f(x)$ – нечетная функция, то есть $f(-x) = -f(x)$. Тогда коэффициенты a_n ее разложения в ряд Фурье можно представить в виде:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nxdx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx.$$

Сделав в первом интеграле замену $t = -x$ и воспользовавшись нечетностью $f(x)$, при всех $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ получим:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(-t) \cos(-nt)(-dt) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos ntdt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx = 0.$$

С другой стороны, аналогичные действия с выражением для b_n дадут:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(-t) \sin(-nt)(-dt) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin ntdt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx. \quad \square \end{aligned}$$

1.4. Разложение в ряд Фурье по синусам и по косинусам

Поскольку тригонометрический ряд Фурье четной на $[-\pi, \pi]$ функции содержит только слагаемые с $\cos nx$, а нечетной – только слагаемые с $\sin nx$, то говорят, что четная функция разложена в ряд Фурье "по косинусам а нечетная – "по синусам".

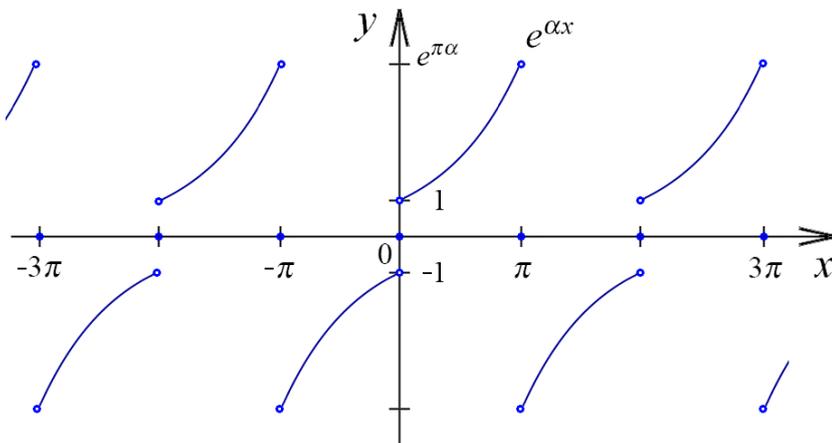
В то же время, если нас не интересует поведение суммы нашего ряда слева от нуля (что очень часто случается в приложениях), то мы вправе рассмотреть вместо заданной функции функцию, продолженную на $[-\pi, 0)$ либо четным, либо нечетным образом. Это избавит нас от необходимости вычислять все коэффициенты общего тригонометрического ряда Фурье, т.к. достаточно будет найти только a_n (либо b_n).

Поэтому часто задачи могут быть сформулированы как в нижеследующем примере.

Пример 1.2. Разложить на промежутке $[0, \pi]$ функцию $f(x) = e^{\alpha x}$ в ряд Фурье а) по синусам; б) по косинусам. В обоих случаях нарисовать график суммы ряда.

а) Раз мы раскладываем по синусам, значит все $a_n = 0$, а b_n вычисляются по формуле:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\alpha x} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} I_2 \Big|_0^{\pi} = [\text{см. (1.1), с. 5}] = \frac{2n}{\pi(\alpha^2+n^2)} (1 - (-1)^n e^{\alpha\pi}).$$



Таким образом, для функции

$$f(x) = e^{\alpha x}$$

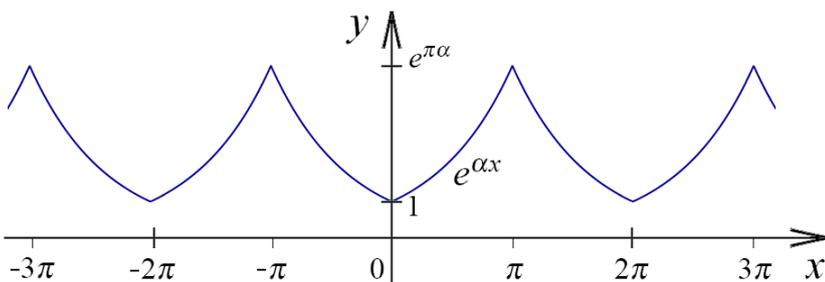
на промежутке $[0, \pi]$ имеем разложение по синусам:

$$e^{\alpha x} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1-(-1)^n e^{\alpha\pi})}{\alpha^2+n^2} \sin nx.$$

б) При разложении по косинусам все $b_n = 0$, а a_n вычисляются по формуле:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\alpha x} \cos nx dx = \frac{2}{\pi} I_1 \Big|_0^{\pi} = [\text{см. (1.1), с. 5}] = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+n^2)} ((-1)^n e^{\alpha\pi} - 1),$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\alpha x} dx = \frac{2(e^{\alpha\pi}-1)}{\pi\alpha}.$$



Таким образом, для функции

$$f(x) = e^{\alpha x}$$

на промежутке $[0, \pi]$ имеем разложение по косинусам:

$$e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha\pi}-1}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{\alpha\pi}-1}{\alpha^2+n^2} \cos nx.$$

Надо отметить, что нами получены три различных представления одной и той же функции рядом Фурье – в примере 1.1 и в примере 1.2. Что это означает? Во-первых: все эти ряды сходятся на интервале $(0, \pi)$ к заданной функции $f(x) = e^{\alpha x}$, во-вторых, за пределами интервала $(0, \pi)$ их суммы ведут себя по-разному, при этом сумма ряда по синусам – нечетная 2π -периодическая функция, сумма ряда по косинусам – четная 2π -периодическая функция, а

сумма ряда по синусам и косинусам из примера 1.1 2π -периодическое продолжение функции $f(x) = e^{\alpha x}$ на всю числовую ось, совпадающее с $f(x)$ на $(-\pi, \pi)$. Таким образом, три различных ряда Фурье сходятся к функциям, различным на \mathbb{R} , но совпадающим на $(0, \pi)$ друг с другом и с $f(x)$.

1.5. Тригонометрический ряд Фурье на промежутке $[-l, l]$

Часто бывает необходимо разложить функцию в ряд Фурье не на $[-\pi, \pi]$, а на промежутке $[-l, l]$. Это легко осуществить при помощи замены переменных.

Пусть функция $f(t) \in QC[-l, l]$ задана на $[-l, l]$. Определим на $[-\pi, \pi]$ новую функцию $g(x)$ по закону:

$$g(x) = f\left(\frac{x l}{\pi}\right) = f(t), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad \frac{x l}{\pi} = t \in [-l, l].$$

При изменении t от $(-l)$ до l переменная $x = \frac{\pi t}{l}$ меняется от $(-\pi)$ до π . Разложим $g(x)$ в обычный тригонометрический ряд Фурье по $[-\pi, \pi]$:

$$f(t) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n t}{l} + b_n \sin \frac{\pi n t}{l} \right),$$

при этом коэффициенты находятся по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos n x dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n t}{l} dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin n x dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi n t}{l} dt.$$

Поэтому для случая промежутка $[-l, l]$ тригонометрический ряд Фурье вводят следующим образом:

Опр. 1.6. Тригонометрическим рядом Фурье на промежутке $[-l, l]$ от функции $f(t) \in QC[-l, l]$ называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n t}{l} + b_n \sin \frac{\pi n t}{l} \right),$$

где $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n t}{l} dt, \quad (n \geq 0); \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi n t}{l} dt, \quad (n > 0).$

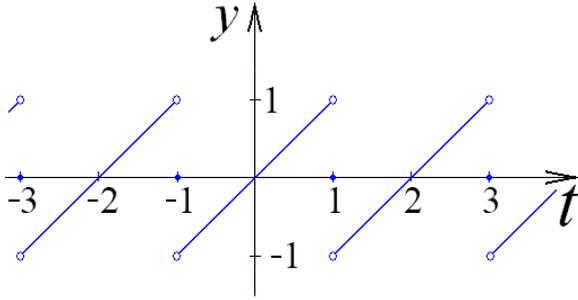
Пример 1.3.

Разложить на $[-1, 1]$ в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(t) = t$.

Так как $f(t)$ – нечетная функция, то все коэффициенты $a_n = 0$, а

$$b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 f(t) \sin \frac{\pi n t}{1} dt = 2 \int_0^1 t \sin \pi n t dt = - \frac{2t \cos \pi n t}{\pi n} \Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \cos \pi n t dt =$$

$$= - \frac{2t \cos \pi n t}{\pi n} \Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{2 \sin \pi n t}{\pi^2 n^2} \Big|_{t=0}^{t=1} = - \frac{2(-1)^n}{\pi n}.$$



Поэтому на промежутке $[-1, 1]$ функция $f(t)$ имеет разложение:

$$t = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \pi n t}{n}.$$

Замечание 1.1. Бывает необходимо представить функцию $f(t)$ ее рядом Фурье по произвольному промежутку $[a - l, a + l]$, не симметричному относительно нуля, с заданными $a \in \mathbb{R}$ и $l > 0$.

Эту задачу также решают при помощи замены переменных: если x меняется от $(-\pi)$ до π , то $t = a + \frac{lx}{\pi}$ будет меняться как раз в пределах от $(a - l)$ до $(a + l)$. В результате получим ряд Фурье общего вида

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n t}{l} + b_n \sin \frac{\pi n t}{l} \right), \quad t \in (a - l, a + l), \quad (1.2)$$

где коэффициенты находятся по формулам:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{a-l}^{a+l} f(t) \cos \frac{\pi n t}{l} dt, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{a-l}^{a+l} f(t) \sin \frac{\pi n t}{l} dt. \quad (1.3)$$

Убедиться в справедливости формул (1.2) – (1.3) можно и из геометрических соображений. Поскольку ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ее $2l$ - периодическому продолжению $F(x)$, а множители

$$\sin \frac{\pi n t}{l} \quad \text{и} \quad \cos \frac{\pi n t}{l}$$

также являются $2l$ - периодическими функциями, то и произведения

$$F(x) \sin \frac{\pi n t}{l} \quad \text{и} \quad F(x) \cos \frac{\pi n t}{l}$$

обязаны быть $2l$ - периодическими функциями. Для $2l$ - периодических функций не имеет значения, по какому именно промежутку (если его длина равна периоду) ведется интегрирование, следовательно, для промежутков $(-l, l)$ и $(a - l, a + l) \quad \forall a \in \mathbb{R}$ результат будет один и тот же:

$$a_n = \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{\pi n t}{l} dx = \int_{a-l}^{a+l} F(x) \cos \frac{\pi n t}{l} dx \equiv \int_{a-l}^{a+l} f(x) \cos \frac{\pi n t}{l} dx,$$

$$b_n = \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{\pi n t}{l} dx = \int_{a-l}^{a+l} F(x) \sin \frac{\pi n t}{l} dx \equiv \int_{a-l}^{a+l} f(x) \sin \frac{\pi n t}{l} dx.$$

Контрольные вопросы. **1)** Какое множество функций обозначается через $QC[-\pi, \pi]$? **2)** Приведите пример ортонормированной системы функций. **3)** Что такое тригонометрический ряд Фурье? Какой вид имеют коэффициенты a_n, b_n на отрезке $[-\pi, \pi]$? **4)** Какими свойствами обладает ряд Фурье? **5)** Что можно сказать про коэффициенты ряда Фурье для четных и нечетных функций? **6)** Чем будет отличаться сумма ряда Фурье одной функции на отрезке $[-\pi, \pi]$, по синусам и по косинусам? **7)** Напишите формулу ряда Фурье на отрезке $[-l, l]$.

2. Интеграл Фурье

2.1. Представление функции интегралом Фурье

При всём своём удобстве аппарат рядов Фурье, изученный нами в предыдущем разделе, имеет свои ограничения. В частности, для его применения необходимо, чтобы раскладываемая функция была периодической, или чтобы нам было неважно её поведение за пределами некоторого отрезка.

Для случая, когда мы не можем пренебречь поведением функции на всей числовой прямой, нам на помощь придёт аппарат «интеграла Фурье».

Опр. 2.1. Интегралом Фурье функции $f(x)$ называется выражение:

$$\int_0^{+\infty} \left(a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x) \right) d\lambda, \quad (2.1)$$

где коэффициенты $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ определяются из формул

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos(\lambda y) dy, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \sin(\lambda y) dy. \quad (2.2)$$

Заметим, что данное определение имеет смысл для всех функций, для которых сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty. \quad (2.3)$$

Поэтому всюду далее мы будем полагать, что условие (2.3) выполнено.

Введём аналогичное пространству $QC[-\pi, \pi]$ множество функций $QC(\mathbb{R}) = QC(-\infty, +\infty)$: **функцию $f(x)$ будем считать принадлежащей множеству $QC(\mathbb{R}) = QC(-\infty, +\infty)$** , если

- 1° $f(x)$ кусочно непрерывна на $(-\infty, +\infty)$;
- 2° $f(x)$ имеет не более конечного числа точек разрыва на \mathbb{R} ;
- 3° все точки разрыва $f(x)$ – разрывы I-го рода¹;
- 4° в точках разрыва $f(x)$ равна среднему арифметическому пределов слева и справа:

$$f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

¹То есть существуют конечные пределы $f(x)$ в этих точках слева и справа.

Теорема 2.1 (О представлении функции её интегралом Фурье).

Усл. $f(x), f'(x) \in QC(\mathbb{R})$. Для функции $f(x)$ сходится интеграл (2.3).

Утв. 1) Интегралы (2.2) сходятся равномерно по λ на \mathbb{R} .

2) Интеграл (2.1) сходится равномерно по x на любом отрезке, не содержащем точек разрыва $f(x)$.

3) Интеграл (2.1) сходится к функции $f(x)$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left(a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x) \right) d\lambda, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (2.4)$$

Замечание 2.1. Интеграл Фурье можно рассматривать как результат предельного перехода при $l \rightarrow +\infty$ в формуле для ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right), \quad (i)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n t}{l} dt, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi n t}{l} dt. \quad (ii)$$

При этом коэффициенты a_n «превращаются» в функцию-коэффициент $a(\lambda)$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n t}{l} dt \quad \mapsto \quad a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos(\lambda y) dy,$$

а коэффициенты b_n – в функцию-коэффициент $b(\lambda)$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi n t}{l} dt \quad \mapsto \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \sin(\lambda y) dy.$$

При этом суммирование по n «превращается» в интегрирование по λ , а ряд Фурье – в интеграл Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n x + b_n \sin n x \right) \quad \mapsto \quad \int_0^{+\infty} \left(a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x) \right) d\lambda.$$

И полученный интеграл сходится к той же самой функции $f(x)$, по которой были найдены его коэффициенты $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, так же как и ряд Фурье сходится к соответствующей функции.

Воспроизведём вкратце идею, следуя которой Фурье и получил формулу интеграла Фурье.

Подставим в (i) выражения для коэффициентов a_n, b_n :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right) = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi n x}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n t}{l} dt + \sin \frac{\pi n x}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi n t}{l} dt \right) = \\ &= \left[\text{в силу равенства } \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) \right] = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n(t-x)}{l} dt \quad (\text{iii}) \end{aligned}$$

Обозначим через y_n коэффициенты $\frac{\pi n}{l}$. Тогда $\frac{1}{l} = \frac{1}{\pi} (y_n - y_{n-1}) = \frac{1}{\pi} \Delta y_n$, и ряд, полученный в (iii) примет вид:

$$f(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-l}^l f(t) \cos \left(y_n(t-x) \right) dt \right] \Delta y_n. \quad (\text{iv})$$

Ряд в правой части (iv) весьма напоминает² предел интегральной суммы для интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-l}^l f(t) \cos \left(y(t-x) \right) dt \right] dy. \quad (\text{v})$$

Теперь устремим $l \rightarrow +\infty$. Так как мы рассматриваем только функции, для которых $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$, то первое слагаемое (iv) стремится к нулю. Учитывая это и (v), получаем из (iv):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \left(y(t-x) \right) dt \right] dy,$$

а это есть одна из форм записи интеграла Фурье (2.1) – (2.2).

2.2. Интеграл Фурье от чётных и нечётных функций

Интеграл Фурье имеет свойство, полностью аналогичное свойству ряда Фурье, представленному утверждением 1.1, стр. 6.

²Лишь напоминает, ибо для несобственных интегралов нет интегральных сумм, несобственные интегралы определяются как предел от интегралов по конечным промежуткам.

Утверждение 2.1.

1) $f(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ – четная на $(-\infty, +\infty)$ функция \Rightarrow

$$b(\lambda) \equiv 0, \quad a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} a(\lambda) \cos(\lambda x) \, d\lambda;$$

2) $f(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ – нечетная на $(-\infty, +\infty)$ функция \Rightarrow

$$a(\lambda) \equiv 0, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} b(\lambda) \sin(\lambda x) \, d\lambda.$$

Доказательство. Докажем, для примера, пункт 2). Пусть $f(x)$ – нечетная функция, то есть $f(-x) = -f(x)$. Тогда коэффициенты $a(\lambda)$ можно представить в виде:

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(t) \cos \lambda t \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt.$$

Сделав в первом интеграле замену $x = -t$ и воспользовавшись нечетностью $f(x)$, при всех λ получим:

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{+\infty}^0 f(-x) \cos(-\lambda x)(-dx) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, аналогичные действия с выражением для $b(\lambda)$ дадут:

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{+\infty}^0 f(-x) \sin(-\lambda x)(-dx) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda t \, dt. \quad \square \end{aligned}$$

2.3. Примеры на интеграл Фурье

Пример 2.1. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| < 1; \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Найдём коэффициенты $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$. Так как функция $f(x)$ – чётная, то

$$b(\lambda) \equiv 0; \quad a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos(\lambda t) \, dt = \frac{2 \sin(\lambda t)}{\pi \lambda} \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{2 \sin \lambda}{\pi \lambda}.$$

Подставляя $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ в формулу (2.1), получим ответ:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos(\lambda x) d\lambda.$$

Пример 2.2. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & \text{при } |x| < 1; \\ 0, & \text{при } |x| > 1, \end{cases} \quad \text{где} \quad \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{при } x < 0; \\ 0, & \text{при } x = 0; \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Здесь используется известная функция сигнум, «функция знака», — $\operatorname{sign} x$, показывающая, какой знак имеет её аргумент.

Найдём коэффициенты $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$. Так как функция $f(x)$ — нечётная, то

$$a(\lambda) \equiv 0; \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin(\lambda t) dt = -\frac{2 \cos(\lambda t)}{\pi \lambda} \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{2(1 - \cos \lambda)}{\pi \lambda}.$$

Подставляя $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ в формулу (2.1), получим ответ:

$$f(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} \sin(\lambda x) d\lambda.$$

Пример 2.3. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \operatorname{sign}(x - a) - \operatorname{sign}(x - b), \quad (b > a).$$

Сначала разберёмся, как выглядит график функции $f(x)$. Так как сигнум показывает знак её аргумента, то

- $\operatorname{sign}(x - a)$ равняется -1 при $x < a$, обращается в нуль в точке $x = a$ и в 1 при $x > a$;
- $\operatorname{sign}(x - b)$ равняется -1 при $x < b$, обращается в нуль в точке $x = b$ и в 1 при $x > b$.

Поэтому

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a; \\ 1, & \text{при } x = a; \\ 2, & \text{при } x \in (a, b); \\ 1, & \text{при } x = b; \\ 0, & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Найдём коэффициенты $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$. Так как функция $f(x)$ ни чётная, ни нечётная, то придётся пользоваться полной формулой (2.1) и искать оба коэффициента $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$.

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b \cos(\lambda t) dt = \frac{2 \sin(\lambda t)}{\pi \lambda} \Big|_{t=a}^{t=b} = \frac{2(\sin(\lambda b) - \sin(\lambda a))}{\pi \lambda}.$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b \sin(\lambda t) dt = -\frac{2 \cos(\lambda t)}{\pi \lambda} \Big|_{t=a}^{t=b} = \frac{2(\cos(\lambda a) - \cos(\lambda b))}{\pi \lambda}.$$

Подставляя $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ в формулу (2.1), получим ответ:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(\lambda b) - \sin(\lambda a)}{\lambda} \cos(\lambda x) - \frac{\cos(\lambda b) - \cos(\lambda a)}{\lambda} \sin(\lambda x) \right) d\lambda = \\ &= \left[\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda(b-x)) - \sin(\lambda(a-x))}{\lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

Пример 2.4. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}, \quad (\alpha > 0).$$

Найдём коэффициенты $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$. Так как функция $f(x)$ – чётная, то

$$\begin{aligned} b(\lambda) &\equiv 0; \quad a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos(\lambda t) dt = \\ &= \left[\text{в силу примера на стр. 7, части I лекций} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\lambda \sin(\lambda t) - \alpha \cos(\lambda t)}{\alpha^2 + \lambda^2} \cdot e^{-\alpha t} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}. \end{aligned}$$

Подставляя $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ в формулу (2.1), получим ответ:

$$f(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{\alpha^2 + \lambda^2} d\lambda.$$

Пример 2.5. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{при } |x| < \pi; \\ 0, & \text{при } |x| > \pi. \end{cases}$$

Найдём коэффициенты $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$. Так как функция $f(x)$ – нечётная, то

$$\begin{aligned} a(\lambda) &\equiv 0; \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \sin(\lambda t) dt = \\ &= \left[\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right) \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos((\lambda - 1)t) - \cos((\lambda + 1)t) \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin((\lambda - 1)t)}{\lambda - 1} - \frac{\sin((\lambda + 1)t)}{\lambda + 1} \right) \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda \cdot \left(\sin((\lambda - 1)\pi) - \sin((\lambda + 1)\pi) \right) + 1 \cdot \left(\sin((\lambda - 1)\pi) + \sin((\lambda + 1)\pi) \right)}{\lambda^2 - 1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2} \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\lambda \cdot \sin(-\pi) \cos(\lambda\pi) + 2 \cdot \sin(\lambda\pi) \cos(-\pi)}{\lambda^2 - 1} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda^2 - 1} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin(\lambda\pi)}{1 - \lambda^2}.
 \end{aligned}$$

Подставляя $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ в формулу (2.1), получим ответ:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda\pi)}{1 - \lambda^2} \sin(\lambda x) d\lambda.$$

3. Преобразование Фурье

3.1. Начальные сведения о комплексных числах

Опр. 3.1. Комплексным числом называется выражение вида $z = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а i – символ, называемый **мнимой единицей**, обладающий свойством $i^2 = -1$ и участвующий в алгебраических операциях на правах обычной константы. Число a называется **действительной частью числа z** , а b – **мнимой частью числа z** : $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Множество всех комплексных чисел обозначается \mathbb{C} .

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются **равными**, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Комплексное число \bar{z} называется **комплексно-сопряжённым к $z = a + ib$** , если $\bar{z} = a - ib$.

Простейшие операции на множестве комплексных чисел.

Опр. 3.2. Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$.

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2, \quad \text{и} \quad b_1 = b_2.$$

Операции **сложения (вычитания), умножения, деления и возведения в натуральную степень n** определяются следующим образом:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2), \quad (3.1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1), \quad (3.2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad (3.3)$$

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ раз.}} \quad (3.4)$$

Лемма 3.1.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{справедливо равенство} \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (3.5)$$

Это соотношение называется **Формулой Эйлера**.

3.2. Преобразование Фурье и интеграл Фурье

Опр. 3.3. Пусть $f(x) \in C(\mathbb{R})$, и для неё сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty. \quad (3.6)$$

Тогда для функции $f(x)$ существует **преобразование Фурье**:

$$F(\lambda) = \widehat{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx. \quad (3.7)$$

При этом функцию $f(x)$ можно восстановить по $F(\lambda)$, называемой её **образом Фурье**, по следующей формуле:

$$f(x) = \widetilde{F(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} F(\lambda) d\lambda. \quad (3.8)$$

Заметим, что между преобразованием Фурье и интегралом Фурье существует тесная взаимосвязь. В самом деле, учитывая формулу Эйлера (3.5), равенство (3.6) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\cos(\lambda t) - i \sin(\lambda t) \right) dt = \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt}_{=\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot a(\lambda)} - \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt}_{=\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot i b(\lambda)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(a(\lambda) - i b(\lambda) \right). \quad (i) \end{aligned}$$

Поэтому формула (3.8) приобретает вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} F(\lambda) d\lambda = \left[\text{по формуле Эйлера} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \left(\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x) \right) d\lambda = \left[\text{в силу (i)} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a(\lambda) - i b(\lambda) \right) \left(\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x) \right) d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x) \right) d\lambda - i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a(\lambda) \sin(\lambda x) + b(\lambda) \cos(\lambda x) \right) d\lambda. \quad (ii) \end{aligned}$$

Поскольку $a(\lambda)$ – функция чётная (это сразу следует из её определения), а $\sin(\lambda x)$ – нечётная, то произведение $a(\lambda) \sin(\lambda x)$ – нечётная по λ функция. А интеграл от нечётной функции по

любому симметричному относительно нуля промежутку равен нулю. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda \equiv \lim_{R \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{-R}^R a(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda}_{=0} = 0$$

Аналогично, произведение $b(\lambda) \cos(\lambda x)$ – нечётная по λ функция. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} b(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda \equiv \lim_{R \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{-R}^R b(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda}_{=0} = 0$$

Итак, последний интеграл правой части (ii) равен нулю, и из (ii) мы получаем равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x) \right) d\lambda,$$

которое полностью совпадает с формулой (2.4), стр. 11. Таким образом, в силу теоремы 2.1, для любой непрерывной функции $f(x)$, для которой сходится интеграл (3.6), равенство (3.8) можно считать доказанным.

Эти рассуждения показывают, что преобразование и интеграл Фурье являются двумя разными формами записи одного и того же представления функции. Поэтому все свойства преобразования Фурье, приведённые ниже, имеют свои аналоги и для интеграла Фурье. Сформулировать их предоставляется заинтересованному читателю.

3.3. Свойства преобразования Фурье

Теорема 3.1 (Свойства преобразования Фурье).

Усл. $F(\lambda) = \widehat{f(x)}$, $G(\lambda) = \widehat{g(x)}$.

Утв. Справедливы утверждения:

1° ИПФ (3.6) от $(\alpha f(x) + \beta g(x))$ равно сумме $\alpha F(\lambda) + \beta G(\lambda)$
(свойство линейности);

2° $\widehat{f(\alpha x)} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$ (теорема масштаба, теорема подобия);

3° $\widehat{f(x + \alpha)} = e^{i\alpha\lambda} \cdot F(\lambda)$ (теорема сдвига, теорема о сдвиге);

4° $\left. \begin{aligned} \widehat{(f(x)e^{i\lambda_0 x})} &= F(\lambda - \lambda_0); \\ \widehat{(f(x)\cos(\lambda_0 x))} &= \frac{F(\lambda - \lambda_0) + F(\lambda + \lambda_0)}{2}; \\ \widehat{(f(x)\sin(\lambda_0 x))} &= \frac{F(\lambda - \lambda_0) - F(\lambda + \lambda_0)}{2i}, \end{aligned} \right\}$ (теорема о модуляции);

5° $\widehat{f'(x)} = i\lambda F(\lambda)$, $\widehat{f^{(n)}(x)} = (i\lambda)^n F(\lambda)$;

6° $\widehat{f * g} = F(\lambda) \cdot G(\lambda)$, $\widehat{f \cdot g} = F(\lambda) * G(\lambda)$, где

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt - \text{свёртка функций } f(x) \text{ и } g(x) \text{ а}$$

$$F * G = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)G(\mu - \lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu - \lambda)G(\lambda)d\lambda - \text{свёртка функций } F(\lambda) \text{ и } G(\lambda),$$

(лемма Бореля о свёртке);

7° если интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt$ существуют, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F(\lambda)}G(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)}g(t) dt \quad (\text{теорема Парсевалля}).$$

Доказательство. 1° Данное свойство сразу следует из свойства линейности интеграла и определения ИПФ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx &= \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx + \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} g(x) dx \equiv \\ &\equiv \alpha F(\lambda) + \beta G(\lambda). \end{aligned}$$

2° Рассмотрим ИПФ от выражения $f(\alpha x)$. По определению ИПФ,

$$\begin{aligned} \widehat{f(\alpha x)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(\alpha x) dx = \left[\text{сделаем замену } t = \alpha x \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda \frac{t}{\alpha}} f(t) \frac{dt}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \frac{\lambda}{\alpha} t} f(t) dt \equiv \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

3° Рассмотрим ИПФ от выражения $f(x + \alpha)$. По определению ИПФ,

$$\begin{aligned} \widehat{f(x + \alpha)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x + \alpha) dx = \left[\text{сделаем замену } t = x + \alpha \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda(t-\alpha)} f(t) dt = e^{i\alpha\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} f(t) dt \equiv e^{i\alpha\lambda} \cdot F(\lambda). \end{aligned}$$

4° Докажем равенство $\widehat{(f(x)e^{i\lambda_0 x})} = F(\lambda - \lambda_0)$.

$$\widehat{(f(x)e^{i\lambda_0 x})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x)e^{i\lambda_0 x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\lambda - \lambda_0)x} f(x) dx \equiv F(\lambda - \lambda_0).$$

Остальные два равенства теоремы о модуляции мы докажем при помощи равенств

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (3.9)$$

которые также называются формулами Эйлера³.

Рассмотрим выражение $\widehat{(f(x) \cos(\lambda_0 x))}$:

$$\begin{aligned} \widehat{(f(x) \cos(\lambda_0 x))} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x) \cos(\lambda_0 x) dx = \left[\text{по первой формуле (3.9)} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x) \frac{e^{i\lambda_0 x} + e^{-i\lambda_0 x}}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x) e^{i\lambda_0 x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x) e^{-i\lambda_0 x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(F(\lambda - \lambda_0) + F(\lambda + \lambda_0) \right). \end{aligned}$$

³Они выводятся из (3.5) так:

из $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, в силу чётности косинуса и нечётности синуса, следует (если заменить z на $(-z)$), что $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$. Сложив эти равенства и поделив пополам, получим первое равенство (3.9), а вычитая из выражения для e^{iz} выражение для e^{-iz} и поделив на $2i$ – второе.

Третье равенство доказывается аналогично второму.

5° Рассмотрим ИПФ от производной $f'(x)$. По определению ИПФ,

$$\begin{aligned} \widehat{f'(x)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f'(x) dx = \left[\text{по частям} \right] = \\ &= \underbrace{e^{-i\lambda x} f(x) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{=0} + i\lambda \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx}_{=F(\lambda)} = i\lambda F(\lambda). \end{aligned}$$

Внеинтегральный член здесь обратился в нуль, потому что $|f(x)| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ в силу сходимости интеграла (3.6)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty, \quad (3.6)$$

а выражение $e^{-i\lambda x}$ по модулю равно 1 при всех⁴ $x \in \mathbb{R}$.

Формула $\widehat{f^{(n)}(x)} = (i\lambda)^n F(\lambda)$ получается n -кратным применением доказанного равенства $\widehat{f'(x)} = i\lambda F(\lambda)$. (Естественно, чтобы это можно было делать, необходимо, чтобы сошлись все интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)| dx$ при всех $k = 1, (n-1)$.)

6° Без доказательства.

7° Без доказательства. □

Кроме этих общих формул часто нужна ещё одна важная формула:

Утверждение 3.1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-p^2 u^2} \cos(qu) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} e^{-\frac{q^2}{4p^2}} \quad (3.10)$$

Доказательство. Пусть $I(q) = \int_0^{+\infty} e^{-p^2 u^2} \cos(qu) du$ – искомый интеграл. Рассмотрим $I'(q)$:

$$\begin{aligned} I'(q) &= - \int_0^{+\infty} u e^{-p^2 u^2} \sin(qu) du = \left[\text{по частям: } u e^{-p^2 u^2} = \frac{1}{-2p^2} \cdot \frac{\partial e^{-p^2 u^2}}{\partial u} \right] = \\ &= - \frac{1}{-2p^2} \cdot \left(\underbrace{e^{-p^2 u^2} \sin(qu) \Big|_{u=0}^{u=+\infty}}_{=0} - q \int_0^{+\infty} e^{-p^2 u^2} \cos(qu) du \right) \equiv - \frac{q}{2p^2} I. \end{aligned}$$

Таким образом, для $I(q)$ получаем соотношение

⁴В самом деле, по определению, модуль комплексного числа равен корню из суммы квадратов его действительной и мнимой частей, поэтому $|e^{-i\lambda x}| = \left| \cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x) \right| = \sqrt{\cos^2(\lambda x) + \sin^2(\lambda x)} = \sqrt{1} = 1$.

$$I'(q) + \frac{q}{2p^2} I = 0.$$

Легко проверить, что любая функция вида

$$I_o(q) = c(p)e^{-\frac{q^2}{4p^2}}$$

удовлетворяет этому соотношению (какова бы ни была $c(p)$).

Чтобы найти $c(p)$, положим в этом равенстве $q = 0$ и возьмём интеграл $I(0)$:

$$c(p) = I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-p^2 u^2} \cdot 1 \cdot du = [t = pu] = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Последний интеграл – интеграл Эйлера – Пуассона, и он равен $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, откуда

$$c(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2p},$$

и окончательно получаем:

$$I(q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} e^{-\frac{q^2}{4p^2}}.$$

□

3.4. Косинус–преобразование и синус–преобразование Фурье

Если $f(x)$ – **чётная функция**, то

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(\lambda x) f(x) dx, \quad (3.11)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(\lambda x) F(\lambda) d\lambda. \quad (3.12)$$

Если $f(x)$ – **нечётная функция**, то

$$F(\lambda) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin(\lambda x) f(x) dx, \quad (3.13)$$

$$f(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin(\lambda x) F(\lambda) d\lambda. \quad (3.14)$$

Поэтому, по аналогии с рядами Фурье по косинусам и по синусам, вводят косинус– и синус–преобразование Фурье.

Опр. 3.4. Пусть $f(x) \in C(\mathbb{R})$, и для неё сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty. \quad (3.6)$$

Тогда для функции $f(x)$ существует **косинус–преобразование Фурье**:

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(\lambda x) f(x) dx, \quad (3.15)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(\lambda x) F_c(\lambda) d\lambda, \quad x > 0. \quad (3.16)$$

При этом для $x < 0$ правая часть (3.16) сходится к **чётному** продолжению $f(x)$ на отрицательную полуось.

Аналогично, для функции $f(x)$ существует **синус–преобразование Фурье**:

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin(\lambda x) f(x) dx, \quad (3.17)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin(\lambda x) F_s(\lambda) d\lambda, \quad x > 0. \quad (3.18)$$

При этом для $x < 0$ правая часть (3.18) сходится к **нечётному** продолжению $f(x)$ на отрицательную полуось.

3.5. Примеры на преобразование Фурье

В этом пункте на понадобятся полученные в примере 1.4, часть I лекций, равенства:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + c, \quad (3.19)$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + c. \quad (3.20)$$

Пример 3.1. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0.$$

Поскольку функция $f(x)$ чётна, $F(\lambda) \equiv F_c(\lambda)$.

$$\begin{aligned} \widehat{e^{-\alpha|x|}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(\lambda x) e^{-\alpha x} dx = \left[\text{по равенству (3.19)} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda \sin(\lambda x) - \alpha \cos(\lambda x)}{\alpha^2 + \lambda^2} \cdot e^{-\alpha x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}. \end{aligned}$$

Пример 3.2. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x) = x e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0.$$

Поскольку функция $f(x)$ нечётна, $F(\lambda) \equiv -i F_s(\lambda)$.

$$\widehat{x e^{-\alpha|x|}} = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin(\lambda x) x e^{-\alpha x} dx. \quad (i)$$

Этот интеграл можно взять по частям, используя равенства (3.19), (3.20). Из (3.19) следует, что

$$\sin(\lambda x) e^{-\alpha x} = \left(\frac{-\alpha \sin(\lambda x) - \lambda \cos(\lambda x)}{\alpha^2 + \lambda^2} e^{-\alpha x} \right)',$$

и для интеграла (i) получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin(\lambda x) x e^{-\alpha x} dx &= [\text{по частям}] = - \underbrace{\frac{\alpha \sin(\lambda x) + \lambda \cos(\lambda x)}{\alpha^2 + \lambda^2} x e^{-\alpha x}}_{=0} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \\ &+ \frac{1}{\alpha^2 + \lambda^2} \int_0^{+\infty} \left(\alpha \sin(\lambda x) + \lambda \cos(\lambda x) \right) e^{-\alpha x} dx = \\ &= [\text{по равенствам (3.19), (3.20)}] = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2} \left(- \frac{\alpha \sin(\lambda x) + \lambda \cos(\lambda x)}{\alpha^2 + \lambda^2} \cdot e^{-\alpha x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} \right) + \\ &+ \frac{\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2} \cdot \frac{\lambda \sin(\lambda x) - \alpha \cos(\lambda x)}{\alpha^2 + \lambda^2} \cdot e^{-\alpha x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2} \left(- \frac{\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2} \right) + \frac{\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2} \left(- \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2} \right) = - \frac{2\alpha\lambda}{(\alpha^2 + \lambda^2)^2}. \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в (i), и учитывая, что $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, получаем:

$$\widehat{x e^{-\alpha|x|}} = i \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \frac{\alpha\lambda}{(\alpha^2 + \lambda^2)^2}.$$

Пример 3.3. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x) = e^{-a^2 x^2}$$

и её важного частного случая, функции

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Поскольку функция $f(x)$ чётна, $F(\lambda) \equiv F_c(\lambda)$. Вспомним формулу (3.10), стр. 22:

$$\int_0^{+\infty} e^{-p^2 u^2} \cos(qu) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} e^{-\frac{q^2}{4p^2}} \quad (3.10)$$

Теперь применим её для нашей задачи:

$$\begin{aligned} \widehat{e^{-a^2 x^2}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(\lambda x) e^{-a^2 x^2} dx = \left[\text{в силу равенства (3.10), при } p = a, \quad q = \lambda \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{\lambda^2}{4a^2}} = \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a^2}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

В частном случае, когда $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, получаем:

$$\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}, \quad (3.22)$$

таким образом, преобразование Фурье переводит функцию $e^{-\frac{x^2}{2}}$ в неё же саму.

Пример 3.4. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x) = e^{-a^2 x^2} \cos(bx).$$

Вспомним формулу из п. 4^о теоремы 3.1, стр. 20:

$$\widehat{(f(x) \cos(\lambda_0 x))} = \frac{F(\lambda - \lambda_0) + F(\lambda + \lambda_0)}{2}$$

Поскольку в предыдущем примере мы выяснили, что

$$\widehat{e^{-a^2 x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a^2}}, \quad (3.21)$$

то для $e^{-a^2 x^2} \cos(bx)$ получаем:

$$\begin{aligned} \widehat{e^{-a^2 x^2} \cos(bx)} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{(\lambda-b)^2}{4a^2}} + e^{-\frac{(\lambda+b)^2}{4a^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2+b^2}{4a^2}} \underbrace{\left(e^{-\frac{-2b\lambda}{4a^2}} + e^{-\frac{2b\lambda}{4a^2}} \right)}_{=2 \operatorname{ch} \frac{b\lambda}{2a^2}} = \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2+b^2}{4a^2}} \operatorname{ch} \frac{b\lambda}{2a^2}. \end{aligned}$$

В частном случае, когда $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, получаем:

$$\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(bx)} = e^{-\frac{\lambda^2+b^2}{2}} \operatorname{ch}(b\lambda).$$

Пример 3.5. Доказать формулу:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cos(2\lambda x) dx = \begin{cases} 1 - \lambda, & \lambda \in (0, 1); \\ 0, & \lambda > 1. \end{cases} \quad (i)$$

Брать напрямую интеграл, стоящий в левой части доказываемого равенства непросто. Однако, мы можем воспользоваться тем, что косинус преобразование Фурье симметрично, т.е. для получения исходной функции достаточно взять косинус преобразование от её косинус преобразования.

Чтобы в левой части стояло в точности косинус преобразование Фурье от некоторой функции, надо сделать замену $t = 2x$ и домножить равенство на $\sqrt{2\pi}$. Получится:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{4 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} \cos(\lambda t) dt = \begin{cases} \sqrt{2\pi} (1 - \lambda), & \lambda \in (0, 1); \\ 0, & \lambda > 1. \end{cases} \quad (\text{ii})$$

Теперь, чтобы доказать (i), достаточно, в силу равенства (3.16), убедиться, что

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \sqrt{2\pi} (1 - \lambda) \cos(\lambda t) d\lambda \equiv 2 \int_0^1 (1 - \lambda) \cos(\lambda t) d\lambda = \frac{4 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2}. \quad (\text{iii})$$

Интеграл в левой части (iii) берётся по частям:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 (1 - \lambda) \cos(\lambda t) d\lambda &= [\text{по частям}] = \frac{2}{t} \left(\underbrace{(1 - \lambda) \sin(\lambda t)}_{=0} \Big|_{\lambda=0}^{\lambda=1} + \int_0^1 \sin(\lambda t) d\lambda \right) = \\ &= -\frac{2}{t} \frac{\cos(\lambda t)}{t} \Big|_{\lambda=0}^{\lambda=1} = \frac{2(1 - \cos t)}{t^2} = \frac{4 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2}. \end{aligned}$$

4. Дополнение: преобразование Фурье в уравнениях математической физики

4.1. Задача Коши для однородного уравнения теплопроводности

Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:⁵

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0, \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x, y), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (4.2)$$

Шаг 1. Применение преобразования Фурье.

Поскольку задача рассматривается на всей прямой $x \in (-\infty, +\infty)$, применяем интегральное преобразование Фурье (3.6) по пространственной переменной x к равенству (4.1).

Пусть

$$U(\lambda; t) = \widehat{u(x; t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} u(x; t) dx,$$

$$\Phi(\lambda) = \widehat{\varphi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} \varphi(x) dx.$$

Тогда результатом действия преобразование Фурье на (4.1) – (4.2) будет задача:

$$U_t(\lambda; t) + a^2 \lambda^2 U(\lambda; t) = 0, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0. \quad (4.3)$$

$$U(\lambda; 0) = \Phi(\lambda), \quad \lambda \in (-\infty, +\infty). \quad (4.4)$$

Шаг 2. Решение задачи (4.3) – (4.4).

⁵Эта задача описывает процесс распространения тепла в бесконечной однородной струне, у которой в момент времени $t = 0$ температура u была распределена по закону $\varphi(x)$.

Легко проверить, что решением уравнения (4.3) является любая функция вида⁶:

$$U(\lambda; t) = c(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t}, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty).$$

А в силу начального условия (4.4) имеем:

$$c(\lambda) = \Phi(\lambda), \quad \implies \quad U(\lambda, t) = \Phi(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t}, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty). \quad (4.5)$$

Шаг 3. Обратное преобразование Фурье.

Применим к (4.5) обратное преобразование Фурье (3.8). Получим

$$\begin{aligned} u(x; t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} U(\lambda; t) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda) e^{i\lambda x} \cdot e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-s)} \cdot \underbrace{e^{-a^2 \lambda^2 t}}_{\text{чётная}} d\lambda \right] ds = \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) \left[\int_0^{+\infty} \cos(\lambda(x-s)) \cdot e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \right] ds = \left[\text{по формуле (3.10), при } \begin{array}{l} q = x - s, \\ p = a\sqrt{t} \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} ds. \end{aligned}$$

Ответ: $u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} ds.$

4.2. Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности

Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0, \quad (4.6)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (4.7)$$

Шаг 1. Применение ИПФ.

Поскольку задача рассматривается на всей прямой $x \in (-\infty, +\infty)$, применяем интегральное преобразование Фурье (3.6) по пространственной переменной x к равенству (4.6).

Пусть

$$U(\lambda; t) = \widehat{u(x; t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} u(x; t) dx,$$

$$F(\lambda, t) = \widehat{f(x, t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} f(x, t) dx.$$

Тогда результатом действия преобразования Фурье на (4.6) – (4.7) будет задача:

$$U_t(\lambda; t) + a^2 \lambda^2 U(\lambda; t) = F(\lambda, t), \quad \lambda \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0. \quad (4.8)$$

$$U(\lambda; 0) = 0, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty). \quad (4.9)$$

Шаг 2. Решение задачи (4.8) – (4.9).

⁶Решение подобных уравнений изучается в курсе «обыкновенные дифференциальные уравнения».

Общее решение однородного линейного уравнения (4.8) имеет вид:

$$U(\lambda; t) = c(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t}, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty).$$

По методу вариации постоянной⁷, общее решение неоднородного линейного уравнения ищется в виде

$$U_{\text{ОНО}} = c(\lambda, t) e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (4.10)$$

Подставляя (4.10) в уравнение (4.8), получим

$$c_t = F(\lambda, t) \cdot e^{a^2 \lambda^2 t}, \quad \implies$$

$$c(\lambda, t) = \int_0^t F(\lambda, \tau) \cdot e^{a^2 \lambda^2 \tau} d\tau + c_1(\lambda).$$

Итак,

$$U_{\text{ОНО}} = c_1(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t} + \int_0^t F(\lambda, \tau) \cdot e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} d\tau.$$

Осталось применить начальное условие:

$$U(\lambda, 0) = c_1(\lambda) + 0 = 0, \quad \implies \quad c_1(\lambda) = 0, \quad \implies$$

$$U_{\text{ОНО}} = \int_0^t F(\lambda, \tau) \cdot e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (4.11)$$

Шаг 3. Обратное преобразование Фурье.

Применим к (4.11) обратное преобразование Фурье (3.8). Получим

$$\begin{aligned} u(x; t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} U(\lambda; t) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-i\lambda s} f(s, \tau) ds}_{=F(\lambda, \tau)} \cdot e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} d\tau d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, \tau) ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-s)} \underbrace{e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)}}_{\text{чётная по } \lambda} d\lambda = \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, \tau) ds \int_0^{+\infty} \cos(\lambda(x-s)) e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} d\lambda = \\ &= \left[\text{по формуле (3.10), при } \begin{array}{l} q = x - s, \\ p = a\sqrt{t-\tau} \end{array} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, \tau) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}} ds. \end{aligned}$$

⁷Это – метод решения неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, он также проходит в соответствующем курсе. Заметим только, что полученная после применения преобразования Фурье задача стала гораздо проще, чем исходная.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, \tau) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}} ds.$$

Замечание 4.1. Объединив результаты пп. 4.1, 4.2, мы получим формулу Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\lambda) d\lambda + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\lambda, \tau) d\lambda d\tau. \quad (4.12)$$

Эта формула даёт решение задачи о распространении тепла в бесконечной однородной струне, у которой в момент времени $t = 0$ температура была распределена по закону $\varphi(x)$, а источники тепла распределяются по ней по закону $f(x, t)$.

5. Дополнение: приложения рядов

5.1. Ряд Тейлора для решения дифференциального уравнения

Если функцию можно представить равномерно на каком-нибудь отрезке сходящимся рядом, то ее значения во всех точках этого отрезка можно с любой наперед заданной точностью посчитать как частичную сумму ряда с достаточно большим числом слагаемых. В частности, если есть разложение функции в ряд Тейлора на интервале $(-R, R)$, то на любом отрезке $[-r, r]$, где $0 < r < R$, эту функцию можно заменить полиномом достаточно высокой степени, чтобы вычислять приближенные значения функции. При этом даже производные (невысокого порядка) полученного полинома будут близки к производным заданной функции. Для вычислительной техники заменить функцию на частичную сумму ее ряда (Тейлора, Фурье или какого-нибудь еще) – единственный способ находить ее значения в заданных точках. Кроме того при помощи представления функций рядами оказывается возможно решение различных задач, для которых другие подходы более громоздки.

Пример 5.1. Найти функции $y(x)$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$xy'(x) - 2y = e^x - \frac{x^2}{2}$$

Будем искать решение в виде ряда $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Тогда $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$. Подставим эти ряды в уравнение:

$$x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = e^x - \frac{x^2}{2}.$$

Внесем x в первом слагаемом под знак суммы и сложим ряды почленно:

$$-2c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n c_n - 2c_n) x^n = e^x - \frac{x^2}{2} \equiv 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x в левой и правой частях по-

следнего равенства, получим условия на c_n :

$$\begin{array}{lll}
 x^0 : & -2c_0 = 1 \Rightarrow & c_0 = -\frac{1}{2}; \\
 x^1 : & (1-2)c_1 = \frac{1}{1!} \Rightarrow & c_1 = -1; \\
 x^2 : & (2-2)c_2 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow & c_2 - \text{любое число}; \\
 x^3 : & (3-2)c_3 = \frac{1}{3!} \Rightarrow & c_3 = \frac{1}{3!}; \\
 \dots & & \\
 x^n : & (n-2)c_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow & c_n = \frac{1}{n! \cdot (n-2)}; \\
 \dots & &
 \end{array}$$

Таким образом внутри своего интервала сходимости ряд

$$y_0(x) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 2}}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot (n-2)} x^n$$

есть решение заданного дифференциального уравнения. Кроме того, решением этого уравнения является любая функция вида $y(x) = y_0(x) + cx^2$, $\forall c \in \mathbb{R}$, так как коэффициент c_2 в искомом разложении оказался произвольным.

5.2. Ряды Фурье в задачах математической физики

В курсе уравнений математической физики существует метод решения начально-краевых задач для уравнений в частных производных, основанный на применении рядов Фурье. Этот метод носит имя **метода Фурье**.

Для его иллюстрации рассмотрим задачу о распространении тепла в тонком стержне длиной π , на концах которого поддерживается нулевая температура, а в начальный момент времени температура (обозначаемая через $u(x, t)$, где x – пространственная переменная, а t – время) распределена по его длине по закону: $u(x, 0) = \sin x$. Известно, что процесс распространения тепла в стержне описывается (в первом приближении) уравнением теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$, где через u_t и u_{xx} обозначены частные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, соответственно, а число a вычисляется через теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности материала стержня.

Таким образом, мы приходим к следующей задаче:

Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \sin(x), & x \in (0, \pi). \end{cases} \quad (5.1)$$

Шаг 1. Вспомогательная задача

Будем искать решение уравнения $u_t = u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ в виде

$$U(x, t) = X(x)T(t).$$

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X(\pi) = 0. \quad (5.2)$$

Подставим $U(x, t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2X''(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (5.3)$$

$$X(0) = X(\pi) = 0, \quad (5.4)$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.5)$$

Задача (5.3)–(5.4) носит название задачи Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (5.3) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad \text{при } \lambda > 0; \quad (5.6)$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad \text{при } \lambda < 0; \quad (5.7)$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{при } \lambda = 0; \quad (5.8)$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x)$. Тогда второе краевое условие $X(\pi) = 0$ выполнено только при $\sqrt{\lambda} = n$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, задача Штурма–Лиувилля имеет бесконечное множество собственных чисел:

$$\lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.9)$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.10)$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_1 = -c_2$, $\Rightarrow X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}x$. Поэтому из второго краевого условия $X(\pi) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_1 x$. Поэтому из второго краевого условия $X(\pi) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n(x) = \sin nx, \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (5.3)–(5.4). Стало быть, рассматривать задачу (5.5) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.11)$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-a^2 n^2 t} \quad (5.12)$$

где A_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (5.1).

Будем искать решение задачи (5.1) в виде $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot A_n e^{-a^2 n^2 t}. \quad (5.13)$$

Из условий задачи мы еще не использовали только начальные условия $u(x, 0) = \sin x$. Для функции $u(x, t)$ искомого вида они означают:

$$\sin x = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx, \quad (5.14)$$

Поскольку ряд в правой части (5.14) содержит (при $n = 1$) слагаемое $A_1 \sin x$, легко видеть, что равенство (5.14) будет выполнено, если взять коэффициенты

$$A_1 = 1, \quad A_n = 0, \quad \text{при } n > 1. \quad (5.15)$$

Все, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (5.13) найденные коэффициенты A_n из (5.15). Получим:

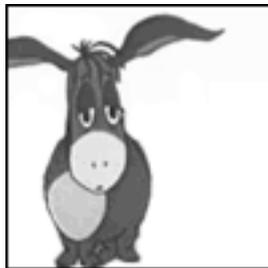
$$u(x, t) = \sin x \cdot e^{-a^2 t}.$$

Полученное решение говорит, что, если начальное распределение температуры в стержне имело вид $\sin x$, а на его концах поддерживается нулевая температура, то в каждой его точке температура будет экспоненциально убывать к нулю с ростом времени t .

Заметим, что ряд (5.13), представляющий вид решения, является при каждом фиксированном t рядом Фурье некоторой функции по синусам. Правда, рассмотренный пример – очень простой: в нем функция $u(x, 0)$ совпадает с одним из слагаемых ряда (5.14), в правой части уравнения (5.1) стоит нуль, а не произвольная функция $f(x, t)$. Но и в самом общем случае метод Фурье позволяет получить решение задачи. В частности, в случае произвольной функции $u(x, 0)$, ее надо разложить в ряд Фурье по синусам и, приравнявая коэффициенты при $\sin nx$ в левой и правой частях (5.14), получить коэффициенты A_n .

5.3. Ряд Фурье для аппроксимации изображений

Ряды, в частности, ряды Фурье, можно использовать для аппроксимации изображений. Пусть, например, дано изображение с маленьким разрешением:



Предположим, мы хотим его увеличить в 2 раза, но так, чтобы гладкие линии остались гладкими, а не ступенчатыми, как при простом удвоении размеров (см. последний рисунок).

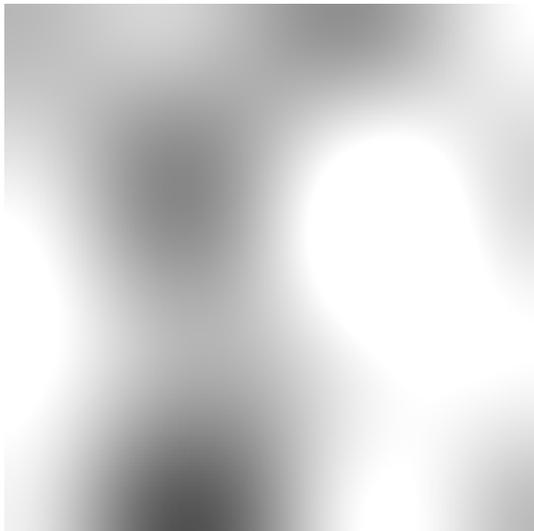
Превратим этот рисунок в сеточную функцию. Каждая точка рисунка имеет яркость, задаваемую в формате .bmp целочисленным значением от 0 до 255. Назовем полученную функцию $f(x, y)$ и воспользуемся формулами частичных сумм двойного ряда Фурье по косинусам:

$$S_{mn}(x, y) = \sum_{j=-m}^{j=m} \sum_{k=-n}^{k=n} a_{jk} \cos \frac{\pi jx}{l_1} \cos \frac{\pi ky}{l_2}, \quad (5.16)$$

где l_1 — ширина рисунка, а l_2 — его высота (в нашем примере $l_1 = l_2 = 100$ пикселей), а коэффициенты a_{jk} находятся по формулам:

$$a_{jk} = \frac{1}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} f(x, y) \cos \frac{\pi j x}{l_1} \cos \frac{\pi k y}{l_2} dy dx. \quad (5.17)$$

Приведем найденные частичные суммы ряда для различного числа слагаемых:



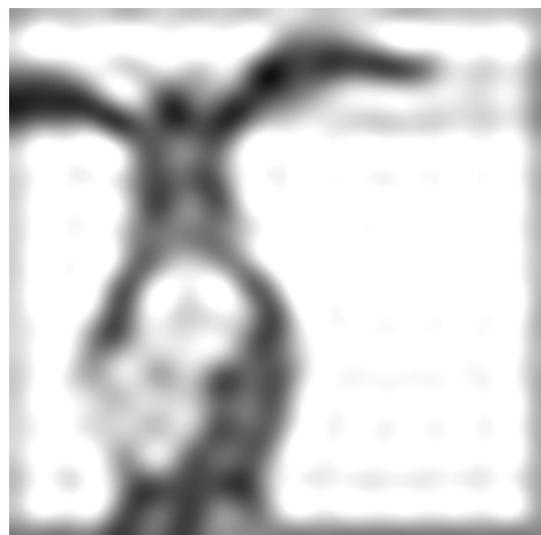
$m = n = 3$



$m = n = 7$



$m = n = 10$



$m = n = 20$



$m = n = 30$



$m = n = 40$



$m = n = 50$



$m = n = 60$



$m = n = 70$



$m = n = 80$



$m = n = 90$



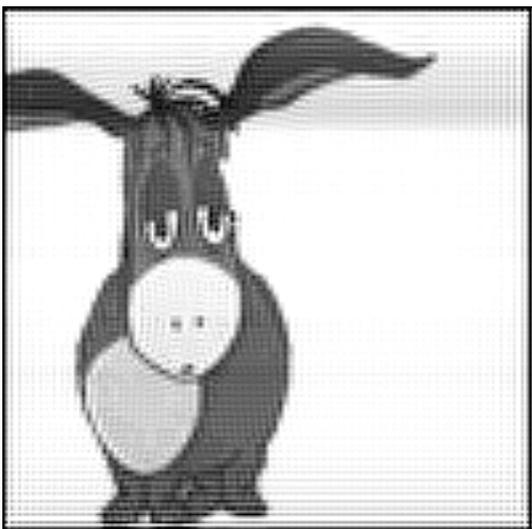
$m = n = 100$



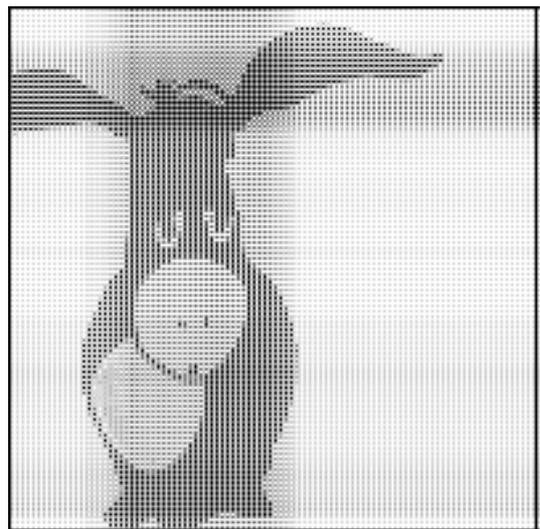
$m = n = 110$



$m = n = 120$



$m = n = 150$



$m = n = 200$

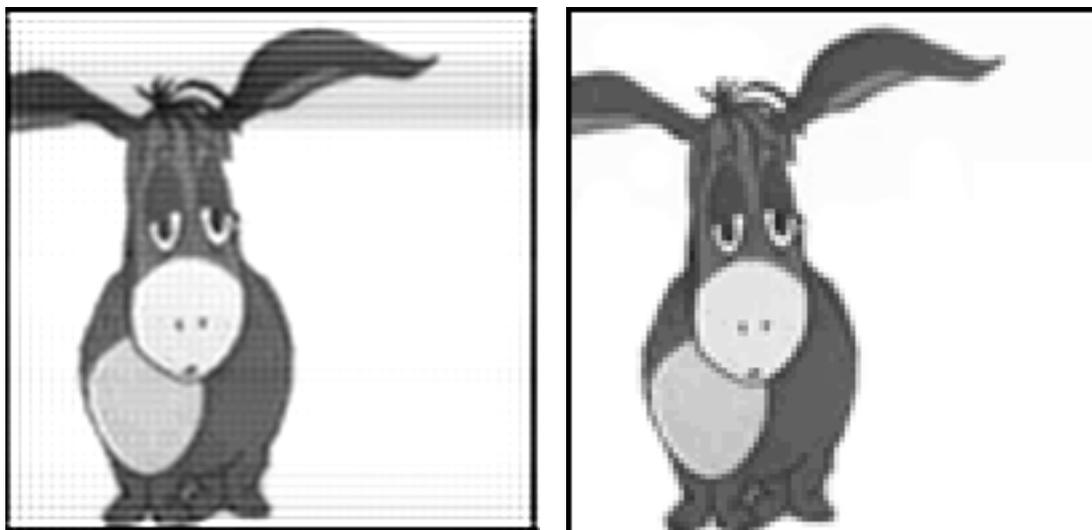
Легко заметить, что качество изображения после определенного момента начинает портиться, и картинка, полученная при $m = n = 200$ (и даже при $m = n = 150$) уже существенно

хуже той, которую мы получили при значениях $m = n = 100$. Это происходит по причине накопления погрешностей округления в процессе счета, которые с какого-то момента начинают превосходить величины слагаемых ряда. Ведь общий член ряда Фурье стремится к нулю, в то время как погрешности округления, как раз напротив, с каждым шагом накапливаются.

Человеческий глаз легко определит, что из всех полученных при помощи ряда Фурье картинок наилучшими по качеству являются те, у которых параметры m и n лежат в пределах от 90 до 110. Какой смысл несут в себе эти параметры? В соответствии с формулой (5.16), числа m и n означают пределы суммирования. Легко посчитать, что количество слагаемых в сумме, стоящих в правой части (5.16), равно $(2m + 1)(2n + 1)$. В частности, при $m = n = 10$, число слагаемых в сумме равно 441, при $m = n = 100$, оно равно 40401, а при $m = n = 200$, это число становится уже 160801.

5.3.1. Эффект Гиббса

Любопытно сравнить лучший просчитанный рисунок с исходным, просто увеличенным вдвое:



$m = n = 100$

исходное изображение $\times 2$

Легко заметить, насколько более четкой стала, например, форма глаз или «прическа» после применения ряда Фурье. Добавился, правда, периодический «шум», вызванный тем, что мы, вычисляя частичную, а не полную сумму ряда Фурье, пренебрегаем слагаемыми с более высокой частотой, чем последнее слагаемое.

Это так называемый **эффект Гиббса**: в окрестности точек разрыва ряд Фурье сходится неравномерно, и это проявляется в том, что у суммы конечного числа членов ряда Фурье есть характерные всплески в окрестности точки разрыва исходной функции, частота которых увеличивается с увеличением числа слагаемых конечной суммы ряда.⁸

И ещё следует обратить внимание, что значительная доля шума, появившегося в полученных через ряд Фурье картинках, порождена чёрной рамкой у исходного рисунка. Если её сделать белой, то разрыв, а следовательно и эффект Гиббса будут меньше. Вот изображения,

⁸Масса иллюстраций этого эффекта, а также свойств преобразования Фурье и интеграла Фурье содержится в электронных пособиях

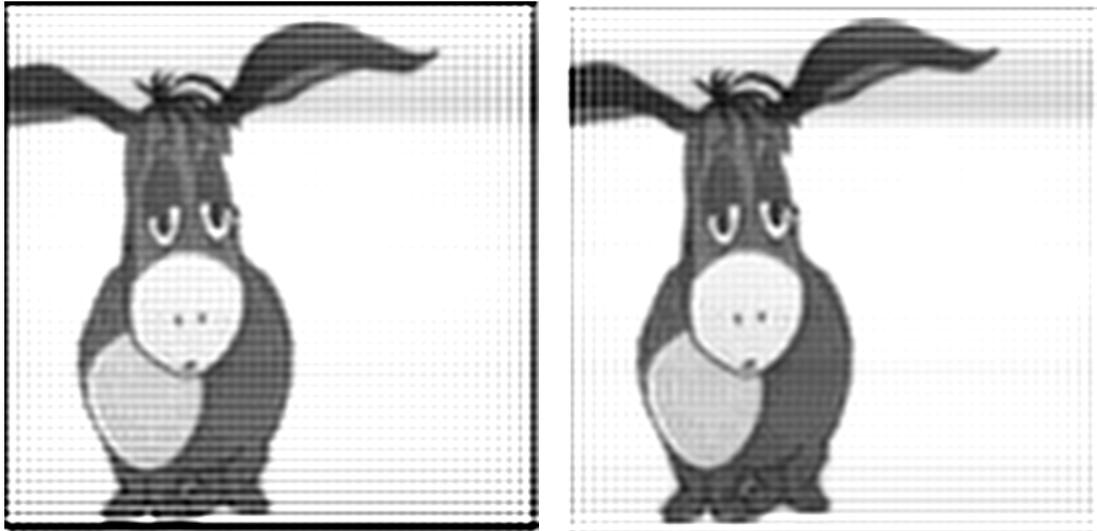
В.П. Дьяконов «Имитация, практический спектральный анализ и синтез сигналов»
http://www.library.vstu.edu.ru/ellib/Exponenta_Ru/soft/Mathemat/dyakonov/nb5/nb5.asp.htm,

Е. Коплович, Д. Коплович, С. Умняшкин «Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: практикум», адрес <http://www.swamp.ru/dsp/links/sem-lab.pdf>,

Один из приёмов борьбы с эффектом Гиббса изложен в статье

С. Хонина, В. Баранов, В. Котляр «Спектральный метод увеличения фрагментов цифровых изображений», *Компьютерная оптика. Вып.19. С. 165-173 (1999)*, с которой можно ознакомиться по адресу <http://www.smr.ru/IPSI/research/publication/KO/PDF/KO19/ko19332.pdf>.

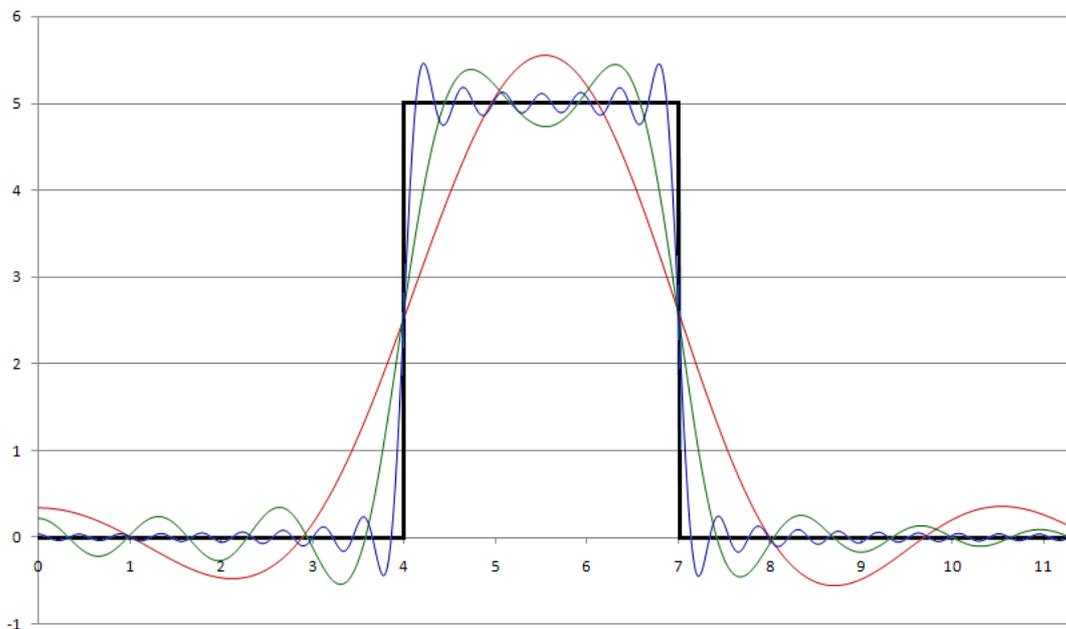
полученные как частичная сумма ряда Фурье при $m = n = 100$ при 4х-кратном увеличении, первый – из картинке с чёрной рамкой, второй – с белой рамкой.



Обратим внимание, что вдали от резких цветовых переходов этот эффект минимален, в то же время он накапливается в областях, где у исходного изображения был максимальный контраст (на уровне ушей и ног Иа) и в окрестности границ картинки.

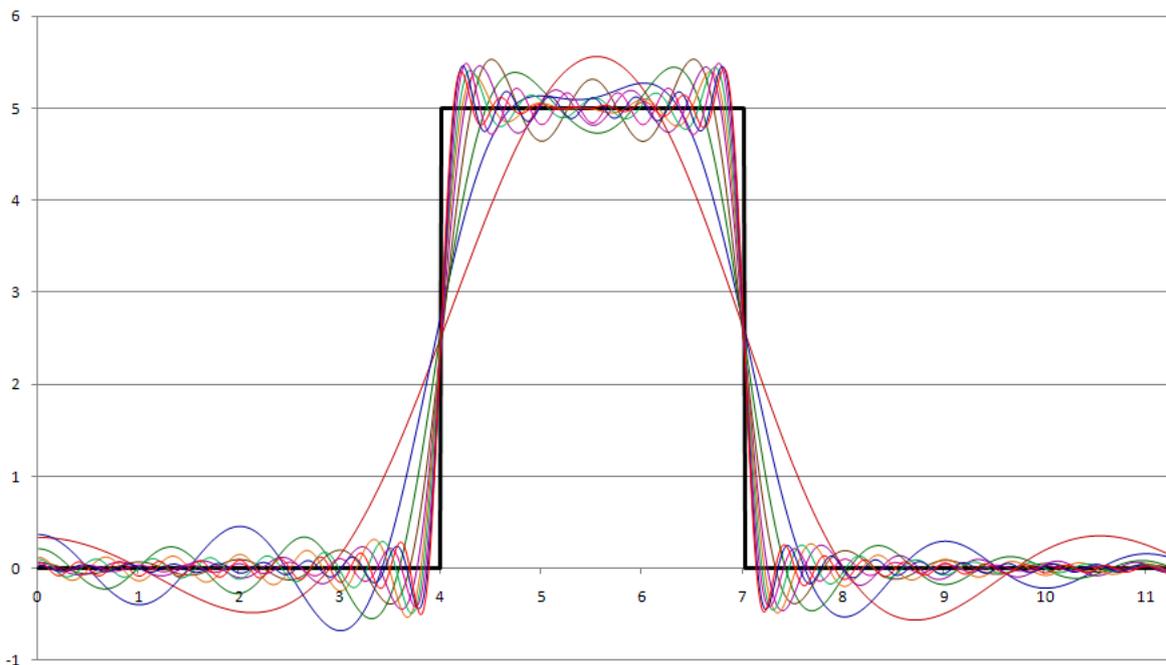
Проиллюстрируем эффект Гиббса, построив частичные суммы ряда Фурье по косинусам для функции с двумя ступеньками:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 4); \\ 5, & x \in (4, 7); \\ 0, & x \in (7, 20). \end{cases} \quad (5.18)$$

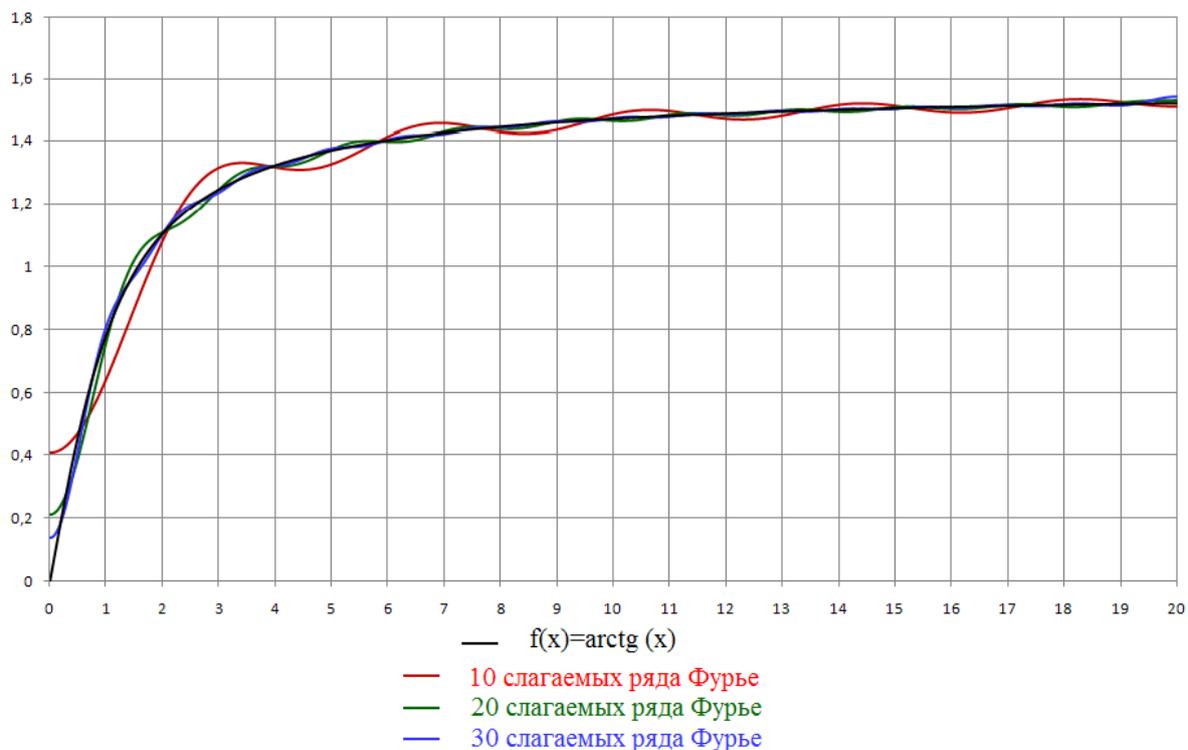


- исходная функция
- 10 слагаемых ряда Фурье
- 30 слагаемых ряда Фурье
- 90 слагаемых ряда Фурье

Заметим, что амплитуда всплесков в окрестности точки разрыва слабо меняется от количества слагаемых ряда: на рисунке ниже приведены графики частичных сумм ряда Фурье той же функции с количеством слагаемых 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 и 100.



При этом на отрезках, где нет точек разрыва, сходимость ряда Фурье равномерна, и на графике это отражается в гораздо меньшем отклонении частичной суммы даже с небольшим числом слагаемых от исходной функции:



5.3.2. Формат *jpeg* и эффект Гиббса

Методы, родственные разложению в ряд Фурье, используются при *jpeg*-сжатии изображений и *mpeg*-сжатии видео. Поэтому всем хорошо знакомы проявления эффекта Гиббса, – волно-

образные искажения, появляющиеся в окрестности резких цветовых переходов.

Для *jpeg*-сжатия изображений, например, используется дискретное косинус-преобразование Фурье для фрагментов 8×8 пикселей, которое практически совпадает (см. формулы (5.19) – (5.22)) с частичной суммой ряда Фурье по косинусам, использованной нами, и может быть посчитано по численному алгоритму под названием «быстрое преобразование Фурье»⁹. Чем выше степень компрессии, тем заметнее искажения. Проиллюстрируем это на примере одного и того же фрагмента фотографии, погвергнутого разной степени *jpeg*-сжатия:

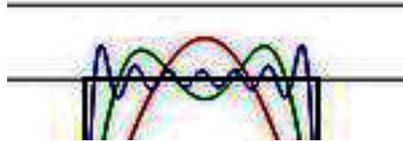
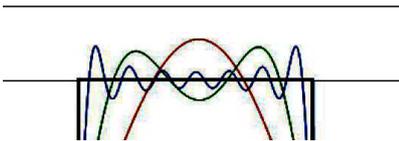


А вот фрагмент текста со страницы 38, с которым были проделаны те же действия:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 4); \\ 5, & x \in (4, 7); \\ 0, & x \in (7, 20). \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 4); \\ 5, & x \in (4, 7); \\ 0, & x \in (7, 20). \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 4); \\ 5, & x \in (4, 7); \\ 0, & x \in (7, 20). \end{cases}$$



Очень хорошо видно, что «грязь» – волнообразные искажения из-за эффекта Гиббса – располагается квадратами, а в квадратах, где на исходной картинке не было цветовых переходов, всё идеально «чисто».

Это показывает, что кодирование фрагментов 8×8 позволяет избежать распространения искажений за пределы каждого из маленьких квадратов. И в отличие от восстановленной нами картинке с Иа, где каждая волна повторялась от края до края, метод *jpeg*-компрессии оставляет волны лишь в непосредственной окрестности того цветового перехода, который их породил. В то же время, алгоритм *jpeg*-сжатия не предполагает увеличения разрешения, и сохраняет картинку в виде специальным образом обработанного (с потерей информации) образа Фурье с абсолютно тем же количеством точек, которое было у исходной картинке. Обратный алгоритм распаковки *jpeg*-файла проводит обратное дискретное косинус-преобразование, также не меняя разрешения. Эти алгоритмы действуют по формулам:

$$F(k, l) = \frac{2}{\sqrt{MN}} c(k) c(l) \sum_{j=0}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi k}{N} \left(j + \frac{1}{2}\right)\right) \sum_{m=0}^{M-1} f(j, m) \cos\left(\frac{\pi l}{M} \left(m + \frac{1}{2}\right)\right), \quad (5.19)$$

$$k, j \in \overline{0, N-1}, \quad l, m \in \overline{0, M-1}, \quad (5.20)$$

$$\check{f}(j, m) = \frac{2}{\sqrt{MN}} \sum_{k=0}^{N-1} c(k) \cos\left(\frac{\pi k}{N} \left(j + \frac{1}{2}\right)\right) \sum_{l=0}^{M-1} c(l) F(k, l) \cos\left(\frac{\pi l}{M} \left(m + \frac{1}{2}\right)\right), \quad (5.21)$$

$$c(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & n = 0; \\ 1, & n > 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Формулы написаны в общем виде, хотя при *jpeg*-компрессии рассматриваются квадраты 8×8 , поэтому реально в (5.19) – (5.21) параметры $M = N = 8$.

⁹Подробное описание алгоритма *jpeg*-сжатия, а также быстрого преобразования Фурье можно найти, например, в пособии **Е. Коплович, Д. Коплович, С. Умняшкин** «Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: практикум», адрес <http://www.swamp.ru/dsp/links/sem-lab.pdf>.

Заинтересованному читателю предоставляется самостоятельно выяснить, в чём совпадают и в чём различаются формулы (5.19) – (5.22) и численная реализация формул (5.16) – (5.17).

Отметим, однако, что знание функции $F(k, l)$ – численного образа Фурье – позволяет восстанавливать исходную функцию f в любом количестве точек: достаточно только в формуле (5.21) заменить N на N_1 , а M – на M_1 , и разрешить индексам j и m пробегать значения в пределах

$$j \in \overline{0, N_1 - 1}, \quad m \in \overline{0, M_1 - 1},$$

то полученная по (5.21) функция $\check{f}(j, m)$ будет задавать картинку с разрешением $M_1 \times N_1$ вместо $M \times N$.

5.3.3. Быстрое преобразование Фурье

Приведём для полноты картины краткое описание этого алгоритма.

Быстрое преобразование Фурье – численный метод, позволяющий сократить число операций при вычислении преобразования Фурье или ряда Фурье с величины порядка N^2 , где N – количество сеточных значений функции $f(k)$ до величины порядка $N \log_2 N$, что при объёмных вычислениях даёт значительную экономию. В оригинальном виде, как его создали его авторы – J.W. Cooley и J.W. Tukey в 1967 году, этот метод рассчитан на случай $N = 2^n$ и состоит в том, что сумма

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} f(j) e^{-\frac{2\pi i}{2^n} kj}, \quad (5.23)$$

может быть разбита на половины, вычисляемые идентичным образом, а так как половина от 2^n – тоже степень двойки, то и каждая из половин суммы (5.23) может быть разбита пополам и так далее до 2^0 , когда сумма состоит уже из одного единственного слагаемого.

Разберём метод Cooley–Tukey для случая **прореживания по времени**¹⁰. В этом случае сумма (5.23) разбивается на суммы отдельно слагаемых с **чётным** и **нечётным** j .

У каждого шага с номером $k \in \overline{1, n}$ будет

на входе: 2^{n-k+1} векторов $\vec{F}_{k-1,l}$, $l \in \overline{0, 2^{n-k+1} - 1}$, в каждом векторе по 2^{k-1} элементов;
на выходе: 2^{n-k} векторов $\vec{F}_{k,m}$, $m \in \overline{0, 2^{n-k} - 1}$, в каждом векторе по 2^k элементов.

Алгоритм

Шаг 0. Для каждого l от 0 до $2^n - 1$ определим «вектор» $\vec{F}_{0,l}$ с одним элементом по закону:

$$\vec{F}_{0,l} = f(l), \quad l \in \overline{0, 2^n - 1}. \quad (5.24)$$

Шаг k .

1) Определим вектор

$$\vec{W} = \left\{ 1, e^{-\frac{2\pi i}{2^k} \cdot 1}, e^{-\frac{2\pi i}{2^k} \cdot 2}, e^{-\frac{2\pi i}{2^k} \cdot 3}, \dots, e^{-\frac{2\pi i}{2^k} \cdot (2^{k-1}-1)} \right\}. \quad (5.25)$$

2) Для каждого m от 0 до $2^{n-k} - 1$ умножим вектор $\vec{F}_{k-1,m+2^{n-k}}$ скалярно на вектор \vec{W} :

$$\vec{G}_{k-1,m} = \left(\vec{F}_{k-1,m+2^{n-k}}, \vec{W} \right) \quad m \in \overline{0, 2^{n-k} - 1}. \quad (5.26)$$

¹⁰У этого метода есть другая разновидность – **прореживание по частоте**. Кроме того, необходимо заметить, что существуют другие методы быстрого преобразования Фурье, о них можно узнать, например в книге Блейхут «Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов».

3) Для каждого m от 0 до $2^{n-k} - 1$ определим вектор $\vec{F}_{k,m}$ по закону:

$$\vec{F}_{k,m} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{k-1,m} + \vec{G}_{k-1,m} \\ \vec{F}_{k-1,m} - \vec{G}_{k-1,m} \end{array} \right\}, \quad m \in \overline{0, 2^{n-k} - 1}. \quad (5.27)$$

Эту запись следует понимать так, что первая половина элементов нового вектора состоит из элементов $\vec{F}_{k-1,m} + \vec{G}_{k-1,m}$, а вторая половина – из элементов $\vec{F}_{k-1,m} - \vec{G}_{k-1,m}$.

Шаг $n + 1$. Функцию $F(j)$, $j \in \overline{0, 2^n - 1}$, из равенства (5.23) получим из равенства

$$F(j) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} F_{n,0,j}, \quad (5.28)$$

где $F_{n,0,j}$ – элемент с номером j вектора $\vec{F}_{n,0}$, полученного на шаге с номером n .

Аналогичные алгоритмы применимы к синус-преобразованию, косинус преобразованию, а также к кратным преобразованиям Фурье, – в частности к двойному косинус-преобразованию, используемому при *jreg*-сжатию изображений.

5.3.4. Подавление эффекта Гиббса

Разработке методов подавления этого эффекта уделяется много внимания. Один из методов состоит в том, чтобы воспользоваться «сглаживающим свойством уравнения теплопроводности»¹¹ Функция, которую надо аппроксимировать (приблизить) рядом Фурье, ставится в качестве начального условия $\varphi(x)$ (в двумерном случае $\varphi(x, y)$) в задаче для уравнения теплопроводности. Эту задачу можно решить, например, методом разделения переменных (он также называется методом Фурье), или по формуле Пуассона (4.12) и рассмотреть вместо исходной функции, равной $u|_{t=0}$, функцию u в момент времени $t_1 > 0$. Функция $u|_{t=t_1}$ будет уже бесконечно гладкой, поэтому эффект Гиббса при разложении её в ряд Фурье будет минимизирован. А если нам нужно, чтобы резкие цветовые переходы были действительно резкими, в их достаточно малой окрестности t_1 надо «устремить к нулю» – т.е. взять достаточно t_1 малым.

Проиллюстрируем использование сглаживающего свойства уравнения теплопроводности. Воспользуемся решением задачи распространения тепла в квадратной мембране с теплоизолированными краями, без источников тепла и с начальным распределением температуры $\varphi(x, y)$:

$$\begin{cases} u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & x \in (0, p), \quad y \in (0, s), \quad t > 0; \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & x \in [0, p], \quad y \in [0, s]; \\ u(0, y, t) = u(p, y, t) = 0, & y \in [0, s], \quad t \geq 0; \\ u(x, 0, t) = u(x, s, t) = 0, & x \in [0, p], \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (5.29)$$

Решение этой задачи, полученное методом Фурье, имеет вид

$$u = \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{kn} \cos\left(\frac{\pi nx}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi ky}{s}\right) e^{-a^2 \lambda_{kn} t}, \quad (5.30)$$

¹¹О нём можно прочитать, например в семинаре по уравнениям математической физики <http://tkachenko-mephi.narod.ru/pdfs/SemK16.rar>.

где

$$\lambda_{kn} = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{s}\right)^2, \quad (5.31)$$

$$\varphi_{kn} = \frac{1}{ps} \int_0^s \int_0^p \varphi(x, y) \cos\left(\frac{\pi n x}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi k y}{s}\right) dx dy. \quad (5.32)$$

Если теперь взять в качестве функции начального распределения температуры функцию яркости точки (с соответствующими координатами) картинки



в квадрате $x, y \in [0, 1]$, мы получим при разных $t > 0$ в разной степени «размазанную» картинку, соответствующую распределению температуры после того, как тепло растекалось по мембране.

Вот полученные при различных t результаты (величина $a^2 = \frac{1}{500000}$):



$t = 5$



$t = 7$



$t = 30$.

Если полученные изображения обработать в простейшем графическом редакторе, увеличив яркость и контраст, мы получим



$t = 5$

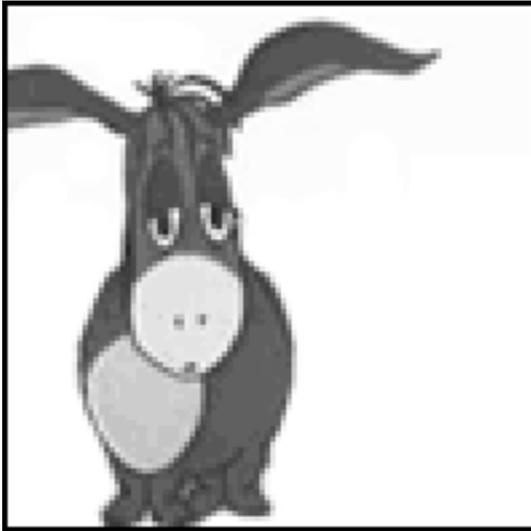


$t = 7$



$t = 30$.

Осталось сравнить исходное изображение, увеличенное вдвое, с обработанным сглаженным изображением при $t = 7$:

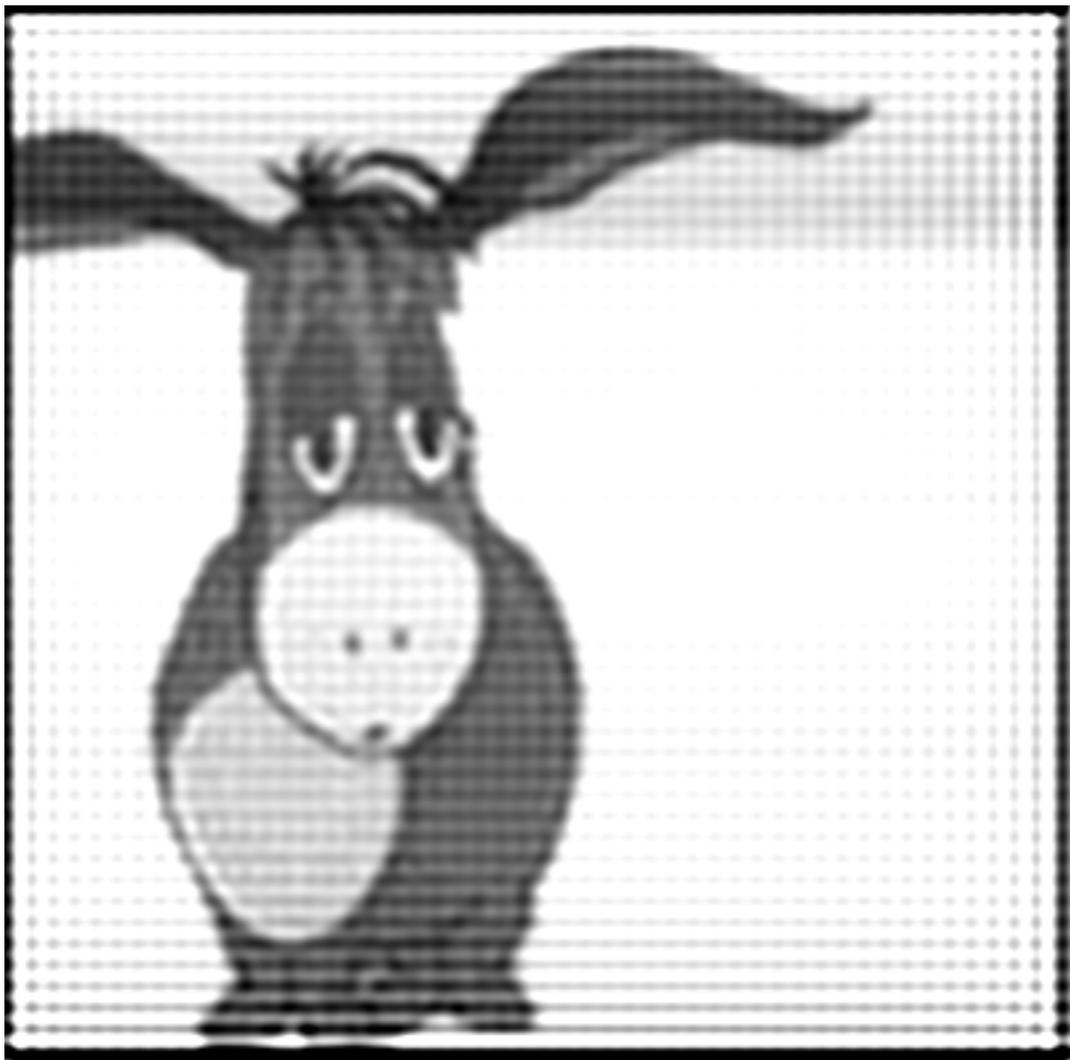


исходное изображение $\times 2$



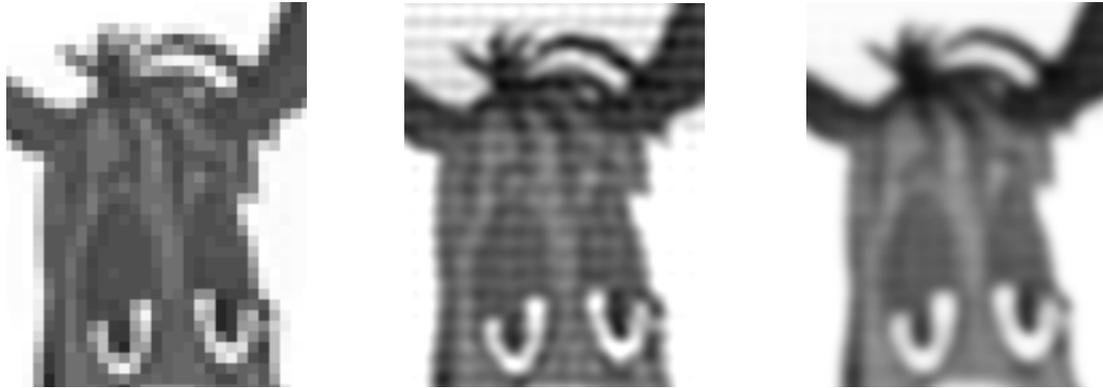
результат обработки.

При этом необходимо отметить, что, посчитав коэффициенты Фурье для $m = n = 100$, мы можем получить картинку сколь угодно высокого разрешения, и единственным фактором, снижающим ее качество, будет **только** этот самый периодический шум. Вот, например, рисунок 400×400 пикселей, полученный из исходной картинке 100×100 частичной суммой ряда Фурье при $m = n = 100$.



$m = n = 100$

Приведем для сравнения часть исходного изображения (с чёрной рамкой), увеличенного в 4 раза, и такую же часть изображения, полученного через ряд Фурье, без сглаживания и обработки и часть изображения, полученного через ряд Фурье с использованием сглаживающего свойства уравнения теплопроводности, и увеличенными контрастом и яркостью:



исходное изображение $\times 4$ ряд Фурье $m = n = 100$ сглаженное и обработанное

Наконец, приведём целиком изображение, увеличенное в 4 раза с помощью ряда Фурье и с использованием сглаживающего свойства уравнения теплопроводности, после увеличения контраста и яркости:



исходное изображение $\times 4$, $m = n = 100$
после сглаживания и обработки.

Список рекомендуемой литературы

- [1] Зорич В.А. *Математический анализ. Часть II.* М.: МЦНМО, 2002.
- [2] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа. Часть II.*// М.: Наука. Физматлит, 2000.
- [3] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. *Математический анализ.*// М.: Наука, 1979.
- [4] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. *Математический анализ.*// *Продолжение курса.* М.: Изд. МГУ, 1987.
- [5] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*// Т. I, II, III. М.: Наука, 1969.