Глава I.

Краевые задачи для ОДУ второго порядка

§ – 1. Основные понятия

I.1.1. Краевые задачи

Наряду с задачей Коши для ОДУ, подробно изученной в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет смысл и иная постановка задачи – т. н. «краевая задача».

Опр. 1. 1. Задача нахождения функции $y = y(x), \quad y \in C^2[a,\ b]$, из условий

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \qquad y = y(x) =?, \tag{1}$$

$$\gamma_1 y'(a) + \gamma_2 y(a) + \gamma_3 y'(b) + \gamma_4 y(b) = 0, \tag{2}$$

$$\delta_1 y'(a) + \delta_2 y(a) + \delta_3 y'(b) + \delta_4 y(b) = 0, \tag{3}$$

где $\gamma_{1,2,3,4},\ \delta_{1,2,3,4}$ – некоторые числа такие, что

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2 \neq 0, \qquad \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 \neq 0,$$

называется **краевой задачей для ОДУ** (1). Равенства (2) и (3) называются **краевыми условиями (КУ)**.

В простейшем случае краевые условия принимают вид

$$\gamma_1 y'(a) + \gamma_2 y(a) = 0, \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0, \tag{4}$$

$$\delta_3 y'(b) + \delta_4 y(b) = 0, \qquad \delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0. \tag{5}$$

Такие краевые условия принято называть **разделёнными**.

Если в правых частях КУ (2) – (5) стоят не нули, а некоторые константы, то такие КУ называются **неоднородными**.

Замечание 1.1. Поскольку заменой искомой функции $y(x)$ всегда можно свести задачу с неоднородными КУ к аналогичной задаче с однородными, **мы будем рассматривать только случай однородных КУ**.

Например, задача

$$\begin{cases} y'' + y = f(x), \qquad x \in [0,\ 1] \\ y(0) = 3, \\ y'(1) = 5 \end{cases}$$

заменой

$$z(x) = y(x) - 5x - 3$$

сводится к задаче

$$\begin{cases} z'' + z = f_1(x) \equiv f(x) - 5x - 3, \\ z(0) = 0, \\ z'(1) = 0, \end{cases}$$

у которой изменилась функция правой части уравнения, но зато краевые условия уже однородны.

I.1.2. Классические граничные операторы

Всюду в дальнейшем мы будем сталкиваться только с краевыми условиями (4) – (5), которые мы будем записывать в виде

$$-y'(a)\sin\alpha + y(a)\cos\alpha = 0, \qquad y'(b)\sin\beta + y(b)\cos\beta = 0.$$

Опр. 1.2. Классическими граничными (краевыми) операторами краевой задачи на $[a,\ b]$ называются операторы

$$\Gamma_a[y] \equiv -y'(a)\sin\alpha + y(a)\cos\alpha, \qquad \alpha \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \tag{6}$$

$$\Gamma_b[y] \equiv y'(b)\sin\beta + y(b)\cos\beta, \qquad \beta \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]. \tag{7}$$

Именно такой вид граничных условий имеет вполне реальный физический смысл. Мы на этом останавливаться не будем.

При различных значениях α и β классические граничные операторы принимают один их трёх возможных видов. Для этих трёх случаев существуют специальные названия краевых операторов и КУ.

Опр. 1.3. Классические краевые операторы вида

1) $\Gamma_a[y] = y(a)$, $\Gamma_b[y] = y(b)$ называются **краевыми операторами I-го рода (операторами Дирихле)**;

2) $\Gamma_a[y] = y'(a), \quad \Gamma_b[y] = y'(b)$ называются **краевыми операторами II-го рода (операторами Неймана)**;

3) $\Gamma_a[y] = y'(a) - hy(a), \quad \Gamma_b[y] = y'(b) + Hy(b)$ при условии $h, H > 0$ называются **краевыми операторами III-го рода**.

Соответствующие краевые условия также называются **краевыми условиями I-го рода (условиями Дирихле) краевыми условиями II-го рода (условиями Неймана)** и **краевыми условиями III-го рода**.

Пример 1. 1. Краевые задачи с граничными условиями I-го, II-го и III-го рода называются соответственно

краевой задачей I-го рода (задачей Дирихле):

$$\begin{cases} y'' + a_(x)y' + a_2(x)y = f(x), & x \in [a,\ b] \\ y(a) = 0, \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

краевой задачей II-го рода (задачей Неймана):

$$\begin{cases} y'' + a_(x)y' + a_2(x)y = f(x), & x \in [a,\ b] \\ y'(a) = 0, \\ y'(b) = 0 \end{cases}$$

и **краевой задачей III-го рода**:

$$\begin{cases} y'' + a_(x)y' + a_2(x)y = f(x), & x \in [a,\ b] \\ y'(a) - hy(a) = 0, & h > 0, \\ y'(b) + Hy(b) = 0, & H > 0. \end{cases}$$

Разумеется, на разных концах отрезка $[a,\ b]$ могут быть КУ разного рода, например, I-го рода на левом конце и III-го на правом. Таким образом, всего на отрезке можно поставить 9 типов краевых задач с классическими граничными операторами.

I.1.3. Задача Штурма–Лиувилля

Существенную роль при исследовании разрешимости краевых задач, и также и в других областях математики (в частности, в уравнениях математической физики), играет специфический подкласс краевых задач – задачи Штурма–Лиувилля.

Опр. 1. 4. Основным дифференциальным оператором 2-го порядка будем называть оператор

$$\mathcal{L}[y] \equiv y''(x) - q(x)y(x). \tag{8}$$

Функция $q(x)$ называется **потенциалом оператора** $\mathcal{L}[y]$.

Всегда и всюду мы будем рассматривать **только случай действительного потенциала:** $q(x) \in \mathbb{R}$.

Опр. 1. 5. Задача нахождения нетривиальных (т.е. отличных от тождественного нуля) функций $y(x)$ и соответствующих им чисел λ из условий

$$\begin{cases} y''(x) - q(x)y(x) = -\lambda y(x), & x \in [a,\ b] \\ \Gamma_a[y] = 0, \\ \Gamma_b[y] = 0 \end{cases} \tag{9}$$

называется **задачей Штурма–Лиувилля**.

Нетривиальные решения $y(x)$ этой задачи называются **собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля** (9), а соответствующие им числа λ – **собственными числами** (9).

Замечание 1. 2. Потенциал $q(x)$ всегда считается действительнозначной функцией. Однако, мы не можем сразу исключать, что собственные значения λ и собственные функции $y(x)$ задачи Штурма–Лиувилля являются также действительными (ведь, к примеру, у матриц с действительными элементами могут быть комплексные собственные числа и векторы).

Ниже мы докажем действительность собственных значений задачи Штурма–Лиувилля. Однако по любой паре действительных собственных функций $u(x)$ и $v(x)$, соответствующих одному и тому же λ, можно построить комплекснозначную функцию $u + iv$, которая также будет удовлетворять КУ и равенству

$$\mathcal{L}[u + iv] = -\lambda(u + iv)$$

с тем же λ.

Замечание 1. 3. Функция $y(x) \equiv 0$ не имеет права считаться решением (собственной функцией) задачи Штурма–Лиувилля, однако $\lambda = 0$ может оказаться собственным значением этой задачи.

В этом ситуация полностью аналогична тому, что мы помним из линейной алгебры: собственный вектор не имеет права быть нулевым, а собственное число может и быть нулём.

Пример 1. 2. *Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями I-го рода:*

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in [0,\ l], \\ y(0) = y(l) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Общее решение уравнения $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ имеет вид

$$y(x) = c_1 \sin(\mu\, x) + c_2 \cos(\mu\, x) \qquad \text{при} \ \ \lambda = \mu^2 > 0;$$
$$y(x) = c_1 e^{\mu\, x} + c_2 e^{-\mu\, x} \qquad \text{при} \ \ \lambda = -\mu^2 < 0;$$
$$y(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при} \ \ \lambda = 0;$$

- При $\lambda = \mu^2 > 0$ имеем из краевого условия $y(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $y(x) = c_1 \sin(\mu\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $y(l) = 0$ получаем, что $\mu\, l = \pi n$, откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

  $$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

  $$y_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda = -\mu^2 < 0$ имеем из краевого условия $y(0) = 0$, что $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow$ $y(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \mu\, x$. Поэтому из второго краевого условия $y(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $y(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $y(x) = c_1 x$. Поэтому из второго краевого условия $y(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad y_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{11}$$

задачи (10).

Пример 1. 3. *Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями II-го рода:*

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, \\ y'(0) = y'(l) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Общее решение уравнения $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) = c_1 \sin(\mu x) + c_2 \cos(\mu x) \qquad &\text{при} \;\; \lambda = \mu^2 > 0; \\ y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} \qquad &\text{при} \;\; \lambda = -\mu^2 < 0; \\ y(x) = c_1 x + c_2 \qquad &\text{при} \;\; \lambda = 0; \end{aligned}$$

- При $\lambda = \mu^2 > 0$ имеем из краевого условия $y'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $y(x) = c_2 \cos(\mu x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = -c_2 \mu \sin(\mu x)$. Поэтому из второго краевого условия $y'(l) = 0$ получаем, что $\mu l = \pi n$, откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda = -\mu^2 < 0$ имеем из краевого условия $y'(0) = 0$, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $y(x) = 2c_1 \operatorname{ch} \mu x \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 2c_1 \mu \operatorname{sh}(\mu x)$. Поэтому из второго краевого условия $y'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $y'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $y(x) = c_2$. Второе краевое условие $y'(l) = 0$ выполнено, поэтому задача Штурма–Лиувилля (12) имеет собственное число, равное нулю: $\lambda_0 = 0$. Ему соответствует собственная функция $y_0(x) \equiv \frac{1}{l}$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_0 = 0, \quad y_0(x) \equiv 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad y_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{13}$$

задачи (12).

Пример 1.4. *Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями III-го рода на левом конце и II-го рода на правом:*

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, \\ y'(0) - hy(0) = y'(l) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{14}$$

Общее решение уравнения $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ имеет вид

$$y(x) = c_1 \sin(\mu\, x) + c_2 \cos(\mu\, x) \qquad \text{при} \;\; \lambda = \mu^2 > 0;$$
$$y(x) = c_1 e^{\mu\, x} + c_2 e^{-\mu\, x} \qquad \text{при} \;\; \lambda = -\mu^2 < 0;$$
$$y(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при} \;\; \lambda = 0;$$

- При $\lambda = \mu^2 > 0$ имеем

  $$y'(x) = c_1 \mu \cos(\mu\, x) - c_2 \mu \sin(\mu\, x)$$

  И из краевого условия $y'(0) + hy(0) = 0$ следует, что

  $$\mu\, c_1 - h\, c_2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \mu = h \frac{c_2}{c_1}.$$

  С другой стороны, из второго краевого условия $y'(l) = 0$ получаем, что

  $$c_1 \cos(\mu\, l) - c_2 \sin(\mu\, l) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{c_2}{c_1} = \operatorname{ctg}(\mu\, l).$$

  Из двух последних равенств, наконец, получаем:

  $$\mu\ = h \operatorname{ctg}(\mu\, l), \qquad \qquad \mu c_1 = h c_2. \tag{15}$$

Уравнение $\mu = h\,\mathrm{ctg}(\mu\, l)$, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений $\mu_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.

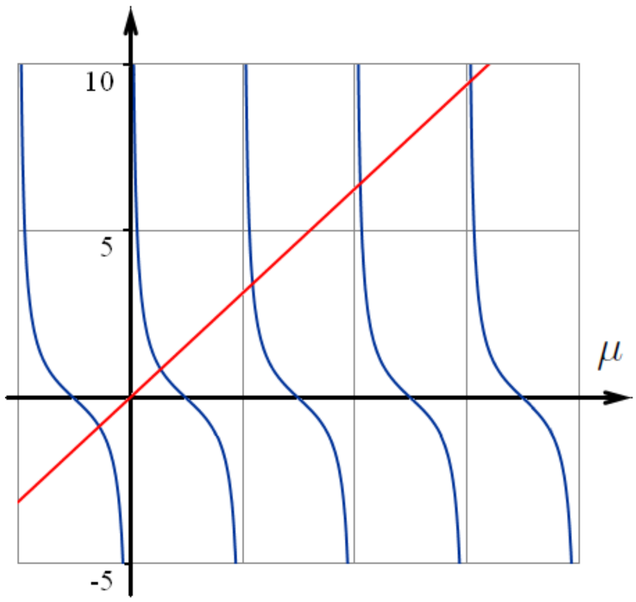

Рис. 1.1. Графическое решение уравнения (15) для случая $h = l = 1$.

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \mu_n^2 > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \mu = h\,\mathrm{ctg}(\mu\, l), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$y_n(x) = h \sin(\mu_n\, x) + \mu \cdot \cos(\mu_n\, x)\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda = -\mu^2 < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $y'(0) - hy(0) = 0$, что $c_1 - hc_2 = 0$, $\Rightarrow$ $y(x) = c_2(hx + 1)$, и второе краевое условие $y(l) = 0$ даёт требование $c_2(hl + 1) = 0$. Отсюда $c_2 = c_1 = 0$ (поскольку $hl > 0$ по условию задачи), и у данной задачи нетривиальных решений, соответствующих $\lambda = 0$ нет.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений задачи (14):

$$\begin{cases} \lambda_n = \mu_n^2 > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \ \ \mu = h\,\mathrm{ctg}(\mu\, l), \\ y_n(x) = h \sin(\mu_n\, x) + \mu \cdot \cos(\mu_n\, x)\,, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{16}$$

§ – 2. Свойства задачи Штурма–Лиувилля

I.2.1. Скалярное произведение

Вспомним определение скалярного произведения из линейной алгебры.

Опр. 1.6. Отображение, ставящее каждой паре $(x_1,\ x_2)$ элементов линейного пространства V число, обозначаемое $(x_1,\ x_2)$ (действительное или комплексное), называется **скалярным произведением**, если

1) $\forall\, x \in V \quad (x,\ x) \geqslant 0$, причём $(x,\ x) = 0 \iff x = \mathbf{0}$;

2) $\forall\, x_1,\ x_2 \in V \quad (x_1,\ x_2) = (x_2,\ x_1)$;

3) $\forall\, x_1,\ x_2,\ x_3 \in V \quad (x_1 + x_2,\ x_3) = (x_1,\ x_3) + (x_2,\ x_3)$;

4) $\forall\, x_1,\ x_2 \in V, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha x_1,\ x_2) = \alpha(x_1,\ x_2)$.

Опр. 1.7. Нормой элемента x линейного пространства V, порождённой скалярным произведением $(x_1,\ x_2)$, называется число, обозначаемое $\|x\|$ и равное корню из его скалярного квадрата:

$$\|x\| = \sqrt{(x,\ x)}.$$

Лемма 1.1. *Формула*

$$(f,\ g) = \int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx \tag{17}$$

задаёт скалярное произведение в пространстве $C[a,\ b]$.

Доказательство. Выполнение определения 1.6 проверяется элементарно.

$\square$

I.2.2. Симметричность оператора Штурма–Лиувилля

Рассмотрим основной дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}[y] \equiv y''(x) - q(x)y(x). \tag{8}$$

Опр. 1.8. Множество функций

$$D(L) = \Big\{ y = y(x) \ \Big| \ \ y \in C^2[a,\ b],\ \ \Gamma_a[y] = 0,\ \ \Gamma_b[y] = 0 \Big\}, \tag{18}$$

мы будем называть **классической областью определения**.
Оператор $\mathfrak{L}[y]$, рассматриваемый только на множестве $D(L)$, мы будем называть **основным оператором на классической области определения** или **оператором Штурма–Лиувилля** и обозначать $L[y]$.

Лемма 1. 2. ***Пусть*** *$f(x)$, $g(x)$ – функции класса $f,\ g \in D(L)$.*
Тогда *справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \mathrm{W}\big[f,\ g\big](a) = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) = 0, \\ \mathrm{W}\big[f,\ g\big](b) = f(b)g'(b) - f'(b)g(b) = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

где $\mathrm{W}\big[f,\ g\big](x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$ *– определитель Вронского системы функций* $\big\{f,\ g\big\}$.

Доказательство. Обоснуем первое из этих равенств. Рассмотрим три случая:

1) $\Gamma_a[y] = y(a) = 0$. Тогда $f(a) = g(a) = 0$, и равенство очевидно:
$$f'(a)\underbrace{g(a)}_{=0} - \underbrace{f(a)}_{=0}g'(a) = 0.$$

2) $\Gamma_a[y] = y'(a) = 0$. Тогда $f'(a) = g'(a) = 0$, и равенство также очевидно:
$$\underbrace{f'(a)}_{=0}g(a) - f(a)\underbrace{g'(a)}_{=0} = 0.$$

3) $\Gamma_a[y] = y'(a) - hy(a) = 0$. Тогда $f'(a) = hf(a)$, $g'(a) = hg(a)$, и равенство также выполняется:
$$\underbrace{f'(a)}_{=hf(a)}g(a) - f(a)\underbrace{g'(a)}_{=hg(a)} = hf(a)g(a) - hf(a)g(a) = 0.$$

Второе равенство (19) доказывается аналогично. □

Лемма 1. 3. *Оператор $L[y]$ является* ***симметричным****, т.е. $\forall\ f(x),\ g(x)$ – функций класса $f,\ g \in D(L)$ справедливо равенство*

$$\big(L[f],\ g\big) = \big(f,\ L[g]\big). \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение $\big(L[f],\ g\big)$:

$$\big(L[f],\ g\big) \equiv \int\limits_a^b \big(f''(x) - q(x)f(x)\big)\, g(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b f''(x)\, g(x)\, dx - \int\limits_a^b q(x) f(x)\, g(x)\, dx = \Big[\text{дважды по частям}\Big] =$$

$$= \underbrace{\Big(f'g - f\,g'\Big)\Big|_a^b}_{=0,\ \text{в силу } (19)} + \int\limits_a^b f(x)\, g''(x)\, dx - \int\limits_a^b q(x)\, f(x) g(x)\, dx \equiv \big(f,\ L[g]\big).$$

□

I.2.3. Действительность собственных значений

Из симметричности оператора всегда следует действительность его собственных значений.

Здесь мы докажем это для оператора Штурма–Лиувилля, а в главе 2 – для оператора Фредгольма с симметричным ядром.

Теорема 1. 1. *Все собственные значения задачи Штурма–Лиувилля*

$$\begin{cases} y''(x) - q(x)y(x) = -\lambda y(x), & x \in [a,\ b] \\ \Gamma_a[y] = 0, \\ \Gamma_b[y] = 0 \end{cases} \tag{9}$$

действительны.

Доказательство. Пусть $-\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, – собственное значение задачи Штурма–Лиувилля и, соответственно, оператора Штурма–Лиувилля $L[y]$. Пусть $y(x) = u(x) + iv(x) \not\equiv 0$ – соответствующая собственная функция.

Тогда $L\big[u + iv\big] = \big(\alpha + i\beta\big)\big(u + iv\big)$, что равносильно системе

$$\begin{cases} L\big[u\big] = \alpha u - \beta v, \\ L\big[v\big] = \beta u + \alpha v. \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{array}{ll} \big(Lu,\ v\big) & = \big(\alpha u - \beta v,\ v\big) = \alpha\big(u,\ v\big) - \beta\big(v,\ v\big) \\ \quad \| & \\ \big(u,\ Lv\big) & = \big(u,\ \beta u + \alpha v\big) = \beta\big(u,\ u\big) + \alpha\big(u,\ v\big), \end{array}$$

откуда $\beta \underbrace{\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)}_{\neq 0} = 0$, что означает, что $\beta = 0$, а значит

$$-\lambda = \alpha \in \mathbb{R}.$$

$\square$

I.2.4. Простота собственных значений

Теорема 1. 2. ***Пусть*** *$\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – собственные функции задачи Штурма–Лиувилля, соответствующие одному и тому же собственному значению λ.*
Тогда *φ и $\psi(x)$ линейно зависимы на $[0,\ l]$.*

Доказательство.
Лемма 1. 2 утверждает, что $\forall\ f(x),\ g(x)$ – функций из $D(L)$, т.е. удовлетворяющих классическим краевым условиям на концах $\big[0,\ l\big]$, справедливы равенства

$$\mathrm{W}\big[f,\ g\big](0) = 0, \qquad \mathrm{W}\big[f,\ g\big](l) = 0,$$

где $\mathrm{W}\big[f;\ g\big](x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$ – определитель Вронского системы функций $\big\{f(x),\ g(x)\big\}$.

В частности, для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ получаем

$$\mathrm{W}\big[\varphi;\ \psi\big](0) = \begin{vmatrix} \varphi(0) & \psi(0) \\ \varphi'(0) & \psi'(0) \end{vmatrix} = 0.$$

Как известно из общей теории линейных ОДУ n-го порядка, если определитель Вронского системы **решений одного и того же линейного уравнения** равен нулю хотя бы в одной точке, то он равен нулю на всём промежутке, на котором выполняется уравнение $\big($в нашем случае – это $[0,\ l]\big)$, и следовательно сами функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ линейно зависимы на этом промежутке. $\square$

Замечание 1. 4. Доказанное свойство называется **простотой собственных значений задачи Штурма–Лиувилля** и означает, что кратность каждого собственного значения равна 1.

I.2.5. Действительность собственных функций

Теорема 1. 3. *Без ограничения общности можно считать, что все собственные функции задачи Штурма–Лиувилля действительнозначны.*

Доказательство.
Пусть функция $y(x) = u(x) + iv(x)$ – комплекснозначная собственная функция задачи Штурма–Лиувилля, соответствующая собственному значению λ. Тогда равенство

$$L[y] = -\lambda y$$

можно переписать в виде

$$(u + iv)'' - q(x)(u + iv) = -\lambda(u + iv).$$

Поскольку $\lambda \in \mathbb{R}$ в силу теоремы 1. 1, а $q(x) \in \mathbb{R}$ по определению 1. 4, данное равенство распадается на два – для действительных частей и для мнимых частей. А именно,

$$u'' - q(x)u = -\lambda u, \qquad \text{и} \qquad v'' - q(x)v = -\lambda v.$$

Это означает, что функции $u(x)$ и $v(x)$ также являются собственными функциями, соответствующими одному и тому же собственному значению λ.

По теореме 1. 2 это означает, что $u(x)$ и $v(x)$ линейно зависимы, т.е. $\exists\, c \in \mathbb{R}$:

$$u(x) = cv(x), \qquad \text{откуда сразу} \quad y(x) = (c + i)v(x), \quad \text{либо}$$

$$v(x) = cu(x), \qquad \text{откуда сразу} \quad y(x) = (1 + ic)v(x).$$

Таким образом, введение комплекснозначных собственных функций не обогащает систему всех собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, а лишь добавляет в неё линейно зависимые элементы. □

Замечание 1. 5. Поэтому **всюду ниже мы будем рассматривать только действительнозначные решения задачи Штурма–Лиувилля**.

I.2.6. Неотрицательность собственных значений

Лемма 1. 4 (о диссипативности)**.** ***Пусть*** *$f(x)$ – функция класса $f \in D(L)$ (т.е. удовлетворяет классическим КУ).*
Тогда *справедливо неравенство*

$$f' f\Big|_a^b \leqslant 0. \tag{22}$$

Доказательство. Проверим неравенства

$$f'(a)f(a) \geqslant 0, \qquad f'(b)f(b) \leqslant 0 \tag{23}$$

Обоснуем первое из этих неравенств. Рассмотрим три случая:

1) $\Gamma_a[y] = y(a) = 0$. Тогда $f(a) = 0$, и неравенство превращается в равенство:
$$f'(a)\underbrace{f(a)}_{=0} = 0.$$

2) $\Gamma_a[y] = y'(a) = 0$. Тогда $f'(a) = 0$, и неравенство также превращается в равенство:
$$\underbrace{f'(a)}_{=0} f(a) = 0.$$

3) $\Gamma_a[y] = y'(a) - hy(a) = 0$. Тогда $f'(a) = hf(a)$, и неравенство также выполняется:
$$\underbrace{f'(a)}_{=hf(a)} f(a) = hf^2(a) \geqslant 0.$$

Второе неравенство (23) доказывается аналогично. □

Замечание 1.6. Неравенства (23) имеют явный физический смысл. Если $f(x)$ есть, к примеру, температура тонкого стержня, теплообмен которого с внешней средой осуществляется только через его концы, а температура среды равна нулю, то данные неравенства означают, что теплообмен происходит посредством отдачи тепла от более нагретого тела к менее нагретому.

Теорема 1.4. ***Пусть*** $q(x) \geqslant m$.
Тогда *для всех собственных значений* λ *задачи Штурма–Лиувилля*

$$\begin{cases} y''(x) - q(x)y(x) = -\lambda y(x), & x \in [a,\ b] \\ \Gamma_a[y] = 0, \\ \Gamma_b[y] = 0 \end{cases} \tag{9}$$

справедлива оценка

$$\lambda \geqslant m. \tag{24}$$

Доказательство.
Рассмотрим собственную функцию $y(x)$: $\quad -Ly = \lambda y$. Имеем:

$$(-L[y], y) = -\int\limits_a^b y''\,y\,dx + \int\limits_a^b qy^2 dx = -y'y\Big|_a^b + \int\limits_a^b \underbrace{y'^2}_{\geqslant 0}\,dx +$$
$$+ \int\limits_a^b \underbrace{(q(x)-m)}_{\geqslant 0}\,y^2(x)\,dx + \underbrace{\int\limits_a^b my^2(x)dx}_{=m\|y\|^2} \geqslant -y'y\Big|_a^b + m\|y\|^2. \quad (25)$$

В силу леммы о диссипативности (22) слагаемое $\left(-y'y\Big|_a^b\right)$ правой части (25) неотрицательно. Поэтому справедливо неравенство:

$$(-L[y], y) \geqslant -y'y\Big|_a^b + m\|y\|^2 \geqslant m\|y\|^2.$$

С другой стороны,

$$(-L[y],\ y) = (\lambda y,\ y) = \lambda\,(y,\ y) \equiv \lambda\|y\|^2,$$

откуда и получаем требуемую оценку

$$\lambda = \frac{(-L[y],\ y)}{\|y\|^2} \geqslant m.$$

□

I.2.7. Предел последовательности собственных значений

Теорема 1.5. *Собственные значения задачи Штурма–Лиувилля образуют бесконечное множество, его можно пронумеровать в порядке возрастания, и полученная последовательность* λ_k*:*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty. \quad (26)$$

I.2.8. Ортогональность собственных функций

Теорема 1.6. ***Пусть*** $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *– собственные функции задачи Штурма–Лиувилля, соответствующие разным собственным значениям* $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *соответственно:*

$$\begin{cases} \mathfrak{L}[\varphi](x) = -\lambda_1\varphi(x), \\ \Gamma_0[\varphi] = \Gamma_l[\varphi] = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}[\psi](x) = -\lambda_2\psi(x), \\ \Gamma_0[\psi] = \Gamma_l[\psi] = 0, \end{cases}$$

Тогда *$\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ортогональны в смысле скалярного произведения (17):*

$$(\varphi,\ \psi) = \int\limits_0^l \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = 0. \tag{27}$$

Доказательство.
Напомним, что все линейно независимые собственные функции задачи Штурма–Лиувилля могут быть выражены через действительнозначные собственные функции, и мы для удобства ими и ограничиваемся.

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\lambda_1\,(\varphi,\ \psi) = (-L[\varphi],\ \psi) = -\,(L[\varphi],\ \psi) =$$
$$= \Big[\text{в силу симметричности оператора } L\Big] =$$
$$= -\,(\varphi,\ L[\psi]) = (\varphi,\ -L[\psi]) = \lambda_2\,(\varphi,\ \psi)\,.$$

Отсюда

$$\underbrace{\big(\lambda_1 - \lambda_2\big)}_{\neq 0}\,\big(\varphi,\ \psi\big) = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \big(\varphi,\ \psi\big) = 0.$$

$\square$

Замечание 1.7. Эта теорема вместе с теоремой 1.5 говорит, что **собственные функции задачи Штурма–Лиувилля образуют бесконечную ортогональную систему функций (ОСФ)**.

Как известно (и мы обсудим это подробнее в §-I.3), если имеется полная (в некотором пространстве) ортонормированная система функций, то по ней можно любую функцию (из этого пространства) разложить в ряд Фурье. Оказывается, система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является полной, этот результат сформулирован в следующей теореме.

I.2.9. Теорема Стеклова

Теорема 1.7 (В. А. Стеклов). ***Пусть*** *$f(x) \in C^2\big[0,\ l\big]$ и удовлетворяет КУ:*

$$\Gamma_0[f] = 0, \qquad \Gamma_l[f] = 0.$$

Пусть *$\big\{\psi_k(x)\big\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система всех линейно независимых собственных функций задачи Штурма–Лиувилля:*

$$\begin{cases} \mathfrak{L}[\varphi_k](x) = -\lambda_k \varphi_k(x), \\ \Gamma_0[\varphi_k] = \Gamma_l[\varphi_k] = 0. \end{cases}$$

***Тогда** справедливо представление функции* $f(x)$ *в виде ряда (Фурье):*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x), \qquad f_k = \frac{(f,\ \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}, \tag{28}$$

причём данный ряд сходится на всём $[0,\, l]$ *абсолютно и равномерно.*

Замечание 1.8. Теорема Стеклова фактически декларирует **полноту** системы всех линейно независимых собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Другими словами, любую функцию (действительно- или комплекснозначную) можно разложить по «базису» из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.

Замечание 1.9. Доказательство этой теоремы также выходит за рамки нашего курса, и как правило осуществляется с использованием теории интегральных уравнений, либо с использованием аппарата операторных преобразований.

Однако, если полнота системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ доказана, формула (28) получается элементарно как следствие общей теории рядов Фурье (см. § – I.3).

Пример 1.5. Пусть дана задача Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} y''(x) = -\lambda y(x), \\ y'(0) = y'(l) = 0. \end{cases}$$

Тогда, решив её как мы сделали в примере 1.3 (с. 6), получим систему собственных функций:

$$\lambda_0 = 0, \quad \varphi_0(x) \equiv 1; \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad \varphi_k(x) = \cos\frac{\pi k x}{l} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Как будет выглядеть ряд (28) из теоремы Стеклова в этом случае? Посчитав норму собственных функций

$$\|\varphi_0\|^2 = \int\limits_0^l 1^2\, dx = l, \qquad \|\varphi_k\|^2 = \int\limits_0^l \cos^2\frac{\pi k x}{l}\ dx = \int\limits_0^l \frac{1 + \overbrace{\cos\frac{2\pi k x}{l}}^{\nearrow 0}}{2} = \frac{l}{2},$$

получим представление для $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi k x}{l},$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\,\cos\frac{\pi kx}{l}\,dx,$$

что полностью совпадает с известной формулой разложения $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье по косинусам.

Если же мы рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} y''(x) = -\lambda y(x), \\ y(0) = y(l) = 0, \end{cases}$$

мы получим разложение $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье по синусам:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi kx}{l},$$

$$b_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\,\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx.$$

Замечание 1.10. Как показывает пример 1.5, в формуле (28) возможно суммирование не от единицы, а от нуля, – тут всё зависит от того, как мы занумеруем последовательность собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.

Замечание 1.11. На самом деле, требование, чтобы $f(x)$ удовлетворяла краевым условиям, необязательно. Если его убрать, то теорема Стеклова будет также верна, только равномерная сходимость ряда (28) будет гарантирована только на любом отрезке, не содержащем точек разрыва функции $f(x)$.

Кроме того, можно отказаться и от требования $f(x) \in C^2\big[0,\ l\big]$, заменив его гораздо более мягким условием $f(x) \in L_2(0,\ l)$, – принадлежности $f(x)$ пространству «обобщённых функций, суммируемых с квадратом», т.е. функций, для которых конечен интеграл Лебега

$$\left|\int\limits_0^l f^2(x)\,dx\right| < +\infty.$$

Замечание 1.12. Все приведённые в §– 1 свойства задачи Штурма–Лиувилля остаются справедливыми и для более общего случая, а именно для задачи

$$\begin{cases} \big(k(x)y'(x)\big)' - q(x)y(x) = -\lambda y(x), \qquad x \in [a,\ b] \\ \Gamma_a[y] = 0, \\ \Gamma_b[y] = 0, \end{cases}$$

где функции $k(x)$ и $q(x)$ непрерывны на $[a,\ b]$, и $k(x) \geqslant k_0 > 0$.

§ – 3. Элементы общей теории рядов Фурье

I.3.1. Гильбертово пространство

Опр. 1.9. Гильбертовым пространством называется бесконечномерное пространство со скалярным произведением.

Точнее, пространство H – **гильбертово**, если

1) H – линейное пространство со скалярным произведением определения 1.6;

2) H полно в смысле метрики $\rho(x,\, y) = \|x - y\| \equiv \sqrt{(x-y,\ x-y)}$, т.е. любая фундаментальная[1] последовательность элементов H сходится к элементу H;

3) H бесконечномерно, т.е. в нём $\forall\, n \in \mathbb{N}$ найдётся n линейно независимых элементов

Опр. 1.10. Гильбертово пространство H называется **сепарабельным** если в нём существует счётное всюду плотное множество.

Другими словами, пространство H – **сепарабельно**, если в нём существует счётный базис – система элементов $\left\{\varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ такая, что любой элемент $x \in H$ можно (и притом единственным образом) представить в виде ряда (разложить по базису):

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k, \qquad x_k \in \mathbb{R}.$$

Далее мы будем рассматривать только сепарабельные гильбертовы пространства.

[1]Последовательность $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ называется фундаментальной, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N \in \mathbb{N}: \ \ \forall\, n > N,\ \forall\, p \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon.$$

Пример 1. 6. Сепарабельным гильбертовым пространством является, например, l_2 – пространство всех числовых последовательностей $a = \big\{a_k\big\}_{k=1}^{\infty}$, для которых сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

а скалярное произведение определено по закону

$$(a,\ b) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k.$$

Сходимость последнего ряда очевидно следует из неравенства

$$a_k b_k \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(a_k^2 + b_k^2\right),$$

равносильного неравенству $(a_k + b_k)^2 \geqslant 0$.

Бесконечный счётный базис строится очевидным образом:

$$\begin{array}{l} \varphi_1 = \big\{1,\ 0,\ 0,\ \ldots\big\} \\ \varphi_2 = \big\{0,\ 1,\ 0,\ \ldots\big\} \\ \varphi_3 = \big\{0,\ 0,\ 1,\ \ldots\big\} \\ \ldots \end{array}$$

Пример 1. 7. Другим примером сепарабельного гильбертова пространства является L_2 – пространство пределов всех фундаментальных последовательностей функций $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$, определённых и имеющих m непрерывных производных на общем отрезке $[a,\ b]$:

$$f_k \in C^m\big[a,\ b\big]$$

для которых сходится интеграл (Лебега)

$$\|f\|^2 \equiv \left|\int\limits_a^b f^2(x)\ dx\right| < +\infty, \tag{29}$$

а скалярное произведение определено по закону

$$(f,\ g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\ dx.$$

Как правило, пределом последовательности функций является функция (например, если все $f_k \in C\big[a,\ b\big]$, а сходимость равномерна, то и

$f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ является непрерывной на $[a,\ b]$. Однако, легко заметить, что некоторые фундаментальные по норме (29) последовательности имеют предел, не являющийся даже функцией в обычном понимании этого слова.

В частности, если рассмотреть последовательность сужающихся «шапочек»

$$f_k(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\left(x-1/k\right)^2}+\frac{1}{\left(x+1/k\right)^2}}, & |x| < \frac{1}{k}; \\ 0, & |x| \geqslant \frac{1}{k} \end{cases},$$

которая состоит из бесконечно дифференцируемых функций, и по ней построить последовательность «всплесков»

$$g_k = \frac{f_k(x)}{\|f_k\|}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx = 1,$$

окажется, что её (поточечным) пределом является «функция»

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0; \\ 0, & |x| > 0 \end{cases},$$

да ещё вдобавок обладающую свойством, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\ dx = 1.$$

Функций с такими свойствами нет, уже равенство $\delta(0) = +\infty$ противоречит определению функции. Чем же одна фундаментальная последовательность функций, предел которой – функция, хуже другой фундаментальной последовательности функций, предел которой – непонятно что?

Чтобы исправить эту несправедливость, ввели понятие «обобщённых функций», считая, что все такие пределы (т.е. пределы по норме (29)) образуют пространство обобщённых функций, суммируемых с квадратом[1], т.е. для которых сходится интеграл (29). (Правда, и понятие интеграла пришлось расширить, чтобы можно было его применять не к функциям, а к вот таким пределам. Так возник интеграл Лебега. В его честь и названо пространство L_2 – пространство функций, суммируемых по Лебегу с квадратом.)

[1]Справедливости ради отметим, что δ – функция не принадлежит, к примеру, $L_2(-l,\ l)$. Она принадлежит другому пространству Лебега – L_1 – функций просто суммируемых, т.е. для которых сходится интеграл $\left|\int\limits_a^b |f(x)|\ dx\right| < +\infty$.

Остаётся отметить, что

$$C^\infty[a,\ b] \subset C^m[a,\ b] \subset C[a,\ b] \subset L_2(a,\ b). \tag{30}$$

При этом $C^\infty[a,\ b]$, $C^m[a,\ b]$, $C[a,\ b]$ – не гильбертовы: они не полны относительно нормы (29).

I.3.2. Ряд Фурье

Пусть H – гильбертово пространство.

Опр. 1.11. Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ элементов H называется **полной**, если для любого элемента $f \in H$ существует разложение по этой системе, т.е. найдутся такие коэффициенты $\alpha_k \in \mathbb{R}$, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\| \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{31}$$

Опр. 1.12. Рядом Фурье для элемента $f \in H$ по ортогональной системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ называется ряд

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \qquad \text{где} \quad c_k = \frac{(f,\ \varphi)}{\|\varphi_k\|^2}. \tag{32}$$

Числа c_k называются **коэффициентами ряда Фурье** (32).
(Отметим, что это определение имеет смысл и для несепарабельного гильбертова пространства H и не полной системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$.)

Теорема 1.8 (Минимизируещее свойство коэффициентов Фурье)**.** ***Пусть*** *H – гильбертово пространство, а $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ – ортогональная система элементов H. Элементу $f \in H$ его сопоставлен ряд Фурье (32) с коэффициентами c_k.*

Тогда *$\forall$ набора коэффициентов $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ и $\forall\ n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\| \leqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|. \tag{33}$$

Доказательство.
Оценим $\left\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right\|$:

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k,\ \ f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) =$$

$$= (f,\ f) - 2\left(f,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underbrace{(f,\ \varphi_k)}_{=c_k\|\varphi_k\|^2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|\varphi_k\|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k - \alpha_k\right)^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Итак,

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k - \alpha_k\right)^2 \|\varphi_k\|^2. \qquad (34)$$

Первое и второе слагаемые правой части от набора коэффициентов $\left\{\alpha_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ никак не зависят, поэтому исследуем последнее: $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(c_k - \alpha_k\right)^2 \|\varphi_k\|^2$. Эта сумма всегда неотрицательна и обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$\alpha_k = c_k \qquad \forall\ k = \overline{1,\ n}.$$

Таким образом, минимального значения разность $\left\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right\|$ достигает при совпадении α_k с коэффициентами Фурье для элемента f. $\square$

Замечание 1.13. Данная теорема называется теоремой «о минимизирующем свойстве коэффициентов Фурье» и означает, что если нам нужен ряд по ортогональной системе функций $\left\{\varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, дающий наилучшее приближение к f, то наилучшим кандидатом является ряд Фурье, так как именно его частичная сумма ближе любых других линейных комбинаций $\left\{\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n\right\}$ к элементу f.

Заметим также, что в действительности любой сходящийся ряд по полной ортогональной системе функций $\left\{\varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ в сепарабельном пространстве H является рядом Фурье своей суммы (этот факт называется теоремой Рисса–Фишера).

I.3.3. Неравенство Бесселя

Теорема 1. 9. ***Пусть*** *H – гильбертово пространство, а $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная система*[1] *(ОНС) элементов H. Элементу $f \in H$ его сопоставлен ряд Фурье (32) с коэффициентами c_k.*

Тогда *ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится, и справедливо* ***неравенство Бесселя****:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{35}$$

Доказательство.
Из равенства (34) при $\alpha_k = c_k$ и $\|\varphi_k\| = 1$ получаем:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2,$$

откуда, в силу неотрицательности выражения $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2$, следует

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Здесь n произвольно, а правая часть не зависит от n, следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится, и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

□

I.3.4. Равенство Парсеваля

Теорема 1. 10. ***Пусть*** *H – сепарабельное гильбертово пространство, а $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система (ПОНС) элементов H. Элементу $f \in H$ его сопоставлен ряд Фурье (32) с коэффициентами c_k.*

[1] Ортонормированной системой элементов гильбертова пространства называется такая система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, что

1) система ортогональна, т.е. $\forall\, n,\ k \in \mathbb{N},\ \ n \neq k \quad (\varphi_k,\ \varphi_n) = 0$;

2) система нормирована, т.е. $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \|\varphi_k\| = 1$.

Тогда *справедливо* ***равенство Парсеваля****:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2. \tag{36}$$

Доказательство.
Поскольку система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полна в H, то по определению 1. 11 найдутся такие коэффициенты $\alpha_k \in \mathbb{R}$, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\| \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{31}$$

С другой стороны, в силу минимизирующего свойства ряда Фурье,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\| \leqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|. \tag{33}$$

Отсюда следует, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\| \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда из равенства (34) при $\alpha_k = c_k$:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \tag{34}$$

получаем, что

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty$$

или, иначе

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \longrightarrow \|f\|^2 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Но это и означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится, и справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2.$$

□

Замечание 1.14. Разница между теоремами о неравенстве Бесселя и равенстве Парсеваля состоит в двух тонких моментах: в условии теоремы о неравенстве Бесселя **не требуется**, чтобы

1) пространство H было сепарабельным;

2) система $\left\{\varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ была полной.

Если же речь идёт именно о сепарабельном гильбертовом пространстве H и полной ортогональной системе $\left\{\varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, то неравенство Бесселя превращается в равенство – равенство Парсеваля.

Литература

[1] *Антоневич А. Б., Радыно Я В.* **Функциональный анализ и интегральные уравнения**// М., изд-во «Университетское», 1984.

[2] *Васильева А. Б., Тихонов Н. А.* **Интегральные уравнения**// М., Физматлит, 2004.

[3] *Карташёв А. П., Рождественский Б. Л.* **Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления**// М., «Наука», 1986.

[4] *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* **Теория обыкновенных дифференциальных уравнений**// М., Изд-во Иностранной литературы, 1958.

[5] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* **Функциональный анализ**// М., Физматлит, 2006.

[6] *Лизоркин П. И.* **Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа**// М., «Наука», 1981.

[7] *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* **Элементы функционального анализа**// М., «Наука», 1965.

[8] *Наймарк М. А.* **Линейные дифференциальные операторы**// М., «Наука», 1969.

[9] *Понтрягин Л. С.* **Обыкновенные дифференциальные уравнения**// М., «Наука», 1974 (1983).

[10] *Треногин В А.* **Функциональный анализ: Учебник** 3-е изд.// М.,Физматлит, 2002.

[11] *Эльсгольц Л. Э.* **Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление**// М., «Наука», 1969.