§ – 4. Функция Грина краевой задачи

I.4.1. Существование функции Грина

Опр. 1.1. Функцией Грина краевой задачи

$$\mathfrak{L}[y] = \big(k(x)y'(x)\big)' - q(x)y = f(x), \tag{1}$$
$$\Gamma_a[y] \equiv -y'(a)\sin\alpha + y(a)\cos\alpha = 0, \qquad \alpha \in \left[0,\ \tfrac{\pi}{2}\right], \tag{2}$$
$$\Gamma_b[y] \equiv y'(b)\sin\beta + y(b)\cos\beta = 0, \qquad \beta \in \left[0,\ \tfrac{\pi}{2}\right], \tag{3}$$

где $k(x) \geqslant k_0 > 0$ и $k(x),\ q(x)$ – заданные функции, причем $k \in C^1\big[a,\ b\big]$, $q \in C\big[a,\ b\big]$, называется функция $G(x,\ t)$, удовлетворяющая требованиям:

1) $G(x,\ t) \in C\big(Q\big)$, где $Q = \Big\{(x,\ t)\ \big|\ \ x \in \big[a,\ b\big],\ \ t \in \big[a,\ b\big]\Big\}$;

2) при любом фиксированном $t \in (a,\ b)$ $G(x,\ t) \in C^2\big([a,\ t) \cup (t,\ b]\big)$ и удовлетворяет однородному уравнению (1):
$$\mathfrak{L}[G] = \big(k(x)G'_x(x,\ t)\big)'_x - q(x)G(x,\ t) = 0, \quad \text{при} \quad x \in [a,\ t) \cup (t,\ b];$$

3) при любом фиксированном $t \in (a,\ b)$ первая производная $G'_x(x,\ t)$ имеет в точке $x = t$ разрыв первого рода, причём
$$G'_x(x,\ t)\Big|_{x=t+0} - G'_x(x,\ t)\Big|_{x=t-0} = \frac{1}{k(t)};$$

4) при любом фиксированном $t \in (a,\ b)$ функция $G(x,\ t)$ удовлетворяет краевым условиям (2) – (3) по x:
$$-G'_x(a,\ t)\sin\alpha + G(a,\ t)\cos\alpha = 0, \qquad G'_x(b,\ t)\sin\beta + G(b,\ t)\cos\beta = 0.$$

Теорема 1.1. ***Пусть*** *$k(x) \geqslant k_0 > 0$ и $q(x)$ – заданные функции, $k \in C^1\big[a,\ b\big]$, $q \in C\big[a,\ b\big]$, и однородная (т.е. при $f(x) \equiv 0$) задача (1) – (3) не имеет других решений, кроме тождественного нуля.*

Тогда *существует функция Грина краевой задачи (1) – (3).*

Доказательство.
Сначала построим функцию $G(x,\ t)$, а потом убедимся, что она удовлетворяет всем пунктам определения 1.1.

Шаг 1. Для начала найдём ФСР $\big\{y_a(x),\ y_b(x)\big\}$ уравнения (1) такую, чтобы
$$\Gamma_a\big[y_a\big] = 0, \qquad \Gamma_b\big[y_b\big] = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим вспомогательные задачи Коши:

$$\begin{cases} \big(k(x)y'(x)\big)' - q(x)y = 0, \quad & x \in [a,\ b], \\ y(a) = \sin\alpha, \\ y'(a) = \cos\alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \big(k(x)y'(x)\big)' - q(x)y = 0, \quad & x \in [a,\ b], \\ y(b) = \sin\beta, \\ y'(b) = -\cos\beta, \end{cases}$$

Во-первых, по ТСЕ решения задачи Коши[1], решение этих задач существует при $x \in [a,\ b]$. Назовём их $y_a(x)$ и $y_b(x)$.

Во-вторых, начальные данные мы подобрали так, чтобы

$$-y_a'(a)\sin\alpha + y_a(a)\cos\alpha = 0, \quad \text{и} \quad y_b'(b)\sin\beta + y_b(b)\cos\beta = 0,$$

т.е. выполнены условия (4).

Итак, есть пара решений уравнения $\mathfrak{L}[y] = 0$, удовлетворяющие каждое своему КУ.

Убедимся, что пара y_a, y_b образует ФСР – максимальную линейно независимую систему решений уравнения (1). Поскольку (1) – уравнение второго порядка, его ФСР должна состоять из двух решений. Поэтому осталось проверить их линейную независимость. Предположим противное: они линейно зависимы, т.е. $\exists\, c \in \mathbb{R}:\ y_a = cy_b$ (либо $y_b = cy_a$). Тогда функция y_a (либо, соответственно, y_b) удовлетворяет обоим КУ и, следовательно, является решением однородной краевой задачи. По условию это означает, что $y_a \equiv 0$, что невозможно, так как мы её строили как решение задачи Коши, удовлетворяющее начальным данным

$$y(a) = \sin\alpha, \qquad y'(a) = \cos\alpha.$$

Полученное противоречие гарантирует линейную независимость y_a и y_b. Таким образом, $\{y_a(x),\ y_b(x)\}$ – ФСР уравнения (1), причём выполняются условия (4).

Шаг 2. Строим функцию Грина.

[1]ТСЕ решения задачи Коши для однородного линейного уравнения гласит, что если все коэффициенты уравнения непрерывны, а старший ещё и отделён от нуля (в нашем случае это условие $k(x) \geqslant k_0 > 0$), то при любых начальных данных в произвольной фиксированной точке $x_0 \in [a,\ b]$ решение задачи Коши существует и притом единственное. См., например, пособие http://tkachenko-mephi.narod.ru/pdfs/ODU.rar, с.90., теорема 7.2.

Пусть

$$\mathrm{W}[y_a,\, y_b](x) = \begin{vmatrix} y_a(x) & y_b(x) \\ y_a'(x) & y_b'(x) \end{vmatrix} = y_a(x)y_b'(x) - y_a'(x)y_b(x) \;\; -$$

Вронскиан пары функций $\{y_a(x),\, y_b(x)\}$. Определим

$$G(x,\, t) = \frac{1}{k(t)\mathrm{W}[y_a,\, y_b](t)} \begin{cases} y_a(x)y_b(t), & a \leqslant x \leqslant t; \\ y_b(x)y_a(t), & t \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \tag{5}$$

Проверим теперь выполнение для функции (5) условий 1) – 4) из определения 1.1.

1) $G(x,\, t) \in C(Q)$, *где* $Q = \Big\{(x,\, t) \;\big|\; x \in [a,\, b],\;\; t \in [a,\, b]\Big\}$.

   Действительно, знаменатель $k(t)\mathrm{W}[y_a,\, y_b](t) \in C(Q)$ и не обращается в нуль, так как $k(t) \geqslant k_0 > 0$, а Вронскиан системы линейно независимых решений однородного линейного уравнения всюду отличен от нуля. Числитель же непрерывен и даже дважды непрерывно дифференцируем в $Q \setminus \{(x,\, t) \;\big|\; x = t\}$. Однако при $x \to t + 0$ и при $x \to t - 0$ у него один и тот же предел:

$$\lim_{x \to t+0} y_b(x)y_a(t) = \lim_{x \to t-0} y_a(x)y_b(t) = y_a(t)y_b(t).$$

2) *При любом фиксированном* $t \in (a,\, b)$ $G(x,\, t) \in C^2\big([a,\, t) \cup (t,\, b]\big)$ *и удовлетворяет однородному уравнению* (1)*:*

$$\mathfrak{L}[G] = \big(k(x)G_x'(x,\, t)\big)_x' - q(x)G(x,\, t) = 0, \quad \text{при} \quad x \in [a,\, t) \cup (t,\, b].$$

   Очевидно так, ибо мы строили $y_a(x)$ и $y_b(x)$ как решения однородного уравнения, а все остальные множители от x вообще не зависят.

3) *При любом фиксированном* $t \in (a,\, b)$ *первая производная* $G_x'(x,\, t)$ *имеет в точке* $x = t$ *разрыв первого рода, причём*

$$G_x'(x,\, t)\Big|_{x=t+0} - G_x'(x,\, t)\Big|_{x=t-0} = \frac{1}{k(t)}.$$

   Для того, чтобы убедиться в справедливости этого равенства для построенной $G(x,\, t)$, найдём

$$G_x'(x,\, t)\Big|_{x=t+0} = \frac{\lim\limits_{x \to t+0} y_b'(x)y_a(t)}{k(t)\mathrm{W}[y_a,\, y_b](t)} = \frac{y_a(t)y_b'(t)}{k(t)\mathrm{W}[y_a,\, y_b](t)},$$

$$G'_x(x,\,t)\Big|_{x=t-0} = \frac{\lim\limits_{x\to t-0} y'_a(x)y_b(t)}{k(t)\mathrm{W}[y_a,\,y_b](t)} = \frac{y'_a(t)y_b(t)}{k(t)\mathrm{W}[y_a,\,y_b](t)},$$

откуда сразу

$$G'_x(x,\,t)\Big|_{x=t+0} - G'_x(x,\,t)\Big|_{x=t-0} = \frac{1}{k(t)}\cdot\underbrace{\frac{y_a(t)y'_b(t)-y'_a(t)y_b(t)}{\mathrm{W}[y_a,\,y_b](t)}}_{=1} = \frac{1}{k(t)}.$$

4) *При любом фиксированном* $t\in(a,\,b)$ *функция* $G(x,\,t)$ *удовлетворяет краевым условиям* (2) – (3) *по* x:

$$-G'_x(a,\,t)\sin\alpha+G(a,\,t)\cos\alpha=0, \qquad G'_x(b,\,t)\sin\beta+G(b,\,t)\cos\beta=0.$$

При этом при построении функции $G(x,\,t)$ мы позаботились о том, чтобы при $x\to a+0$ она вела себя как $c_1(t)y_a(x)$, а при $x\to b-0$ – как $c_2(t)y_b(x)$. Поскольку мы строили $y_a(x)$ и $y_b(x)$ так, чтобы они удовлетворяли КУ, – y_a на левом конце, y_b – на правом, сразу получается, что

$$-G'_x(a,\,t)\sin\alpha+G(a,\,t)\cos\alpha = c_1(t)\underbrace{\big(-y'_a(a)\sin\alpha+y_a(a)\cos\alpha\big)}_{=0}=0,$$

$$G'_x(b,\,t)\sin\beta+G(b,\,t)\cos\beta = c_2(t)\underbrace{\big(y'_b(b)\sin\beta+y_b(b)\cos\beta\big)}_{=0}=0.$$

□

I.4.2. Единственность функции Грина

Теорема 1. 2. ***Пусть*** *$k(x)\geqslant k_0>0$ и $q(x)$ – заданные функции, $k\in C^1\big[a,\,b\big]$, $q\in C\big[a,\,b\big]$, и однородная (т.е. при $f(x)\equiv 0$) задача* (1) – (3) *не имеет других решений, кроме тождественного нуля.*

Тогда *не может быть двух разных функций Грина $G(x,\,t)$ и $F(x,\,t)$ краевой задачи* (1) – (3).

Доказательство.
Рассмотрим разность функций Грина $G(x,\,t)$ и $F(x,\,t)$:

$$H(x,\,t)=G(x,\,t)-F(x,\,t).$$

Так как $G(x,\,t)$ и $F(x,\,t)$ – функции Грина одной и той же задачи, их разность обладает следующими свойствами:

1) $H(x,\,t)\in C\big(Q\big)$, где $Q=\Big\{(x,\,t)\ \big|\ \ x\in\big[a,\,b\big],\ \ t\in\big[a,\,b\big]\Big\}$;

2) при любом фиксированном $t \in (a,\ b)$ $H(x,\ t) \in C^2\big([a,\ t) \cup (t,\ b]\big)$ и удовлетворяет однородному уравнению (1):

$$\mathfrak{L}[H] = \big(k(x)H'_x(x,\ t)\big)'_x - q(x)H(x,\ t) = 0, \quad \text{при} \quad x \in [a,\ t) \cup (t,\ b];$$

3) при любом фиксированном $t \in (a,\ b)$ первая производная $H'_x(x,\ t)$ непрерывна в точке $x = t$:

$$H'_x(x,\ t)\Big|_{x=t+0} - H'_x(x,\ t)\Big|_{x=t-0} = G'_x(x,\ t)\Big|_{x=t+0} - G'_x(x,\ t)\Big|_{x=t-0} - \\ - \left[F'_x(x,\ t)\Big|_{x=t+0} - F'_x(x,\ t)\Big|_{x=t-0}\right] = \frac{1}{k(t)} - \frac{1}{k(t)} = 0;$$

4) при любом фиксированном $t \in (a,\ b)$ функция $H(x,\ t)$ удовлетворяет краевым условиям (2) – (3) по x:

$$-H'_x(a,\ t)\sin\alpha + H(a,\ t)\cos\alpha = 0, \qquad H'_x(b,\ t)\sin\beta + H(b,\ t)\cos\beta = 0.$$

Из пункта 2) следует, что

$$H''_{xx}(x,\ t) = \frac{k'(x)H'_x(x,\ t) - q(x)H(x,\ t)}{k(x)}.$$

Тогда в силу пункта 3) получим, что правая часть непрерывна, в том числе и при $x = t$, откуда

$$H''_{xx}(x,\ t) \in C\big(Q\big).$$

Но в этом случае пункт 2) влечёт, что $H(x,\ t)$ удовлетворяет однородному уравнению (1):

$$\mathfrak{L}[H] = \big(k(x)H'_x(x,\ t)\big)'_x - q(x)H(x,\ t) = 0, \quad \text{при} \quad x \in [a,\ b].$$

Итак, функция $H(x,\ t) = G(x,\ t) - F(x,\ t)$ есть решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее однородным КУ (2) – (3). По условию теоремы это означает, что

$$H(x,\ t) \equiv 0, \qquad \text{т.е.} \quad G(x,\ t) \equiv F(x,\ t).$$

□

I.4.3. Решение краевой задачи при помощи функции Грина

Теорема 1. 3 (Гильберт).
Пусть *$k(x) \geqslant k_0 > 0$ и $q(x)$ – заданные функции, $k \in C^1\big[a,\ b\big]$, $q \in C\big[a,\ b\big]$, и однородная (т.е. при $f(x) \equiv 0$) задача (1) – (3) не имеет других решений, кроме тождественного нуля.*
Тогда *для любой функций $f(x) \in C\big[a,\ b\big]$ существует и притом единственное решение краевой задачи (1) – (3)*

$$\mathfrak{L}[y] = \big(k(x)y'(x)\big)' - q(x)y = f(x), \tag{1}$$

$$\Gamma_a[y] \equiv -y'(a)\sin\alpha + y(a)\cos\alpha = 0, \tag{2}$$

$$\Gamma_b[y] \equiv y'(b)\sin\beta + y(b)\cos\beta = 0, \tag{3}$$

При этом справедлива формула

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x,\ t)f(t)\,dt, \tag{6}$$

где $G(x,\ t)$ – функция Грина задачи (1) – (3).

Доказательство.
Существование решения вида (6)**.** Пользуясь явным видом (5) построенной нами функции Грина и введя для краткости обозначения

$$c(t) = \frac{1}{k(t)\mathrm{W}[y_a,\ y_b](t)}, \qquad z(x) = \int\limits_a^b G(x,\ t)f(t)\,dt,$$

запишем:

$$G(x,\ t) = \begin{cases} y_a(x)c(t)y_b(t), & a \leqslant x \leqslant t; \\ y_b(x)c(t)y_a(t), & t \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{7}$$

и тогда функция $z(x)$ принимает вид:

$$z(x) = \int\limits_a^b G(x,\ t)f(t)\,dt \equiv \int\limits_a^x y_b(x)c(t)y_a(t)f(t)\,dt + \int\limits_x^b y_a(x)c(t)y_b(t)f(t)\,dt =$$

$$= y_b(x)\underbrace{\int\limits_a^x c(t)y_a(t)f(t)\,dt}_{I_a(x)} + y_a(x)\underbrace{\int\limits_x^b c(t)y_b(t)f(t)\,dt}_{I_b(x)} = y_b(x)I_a(x) + y_a(x)I_b(x).$$

Тогда

$$z'(x) = y_b'(x)\int\limits_a^x c(t)y_a(t)f(t)\,dt + y_a'(x)\int\limits_x^b c(t)y_b(t)f(t)\,dt +$$
$$+ y_b(x)c(x)y_a(x)f(x) - y_a(x)c(x)y_b(x)f(x) =$$
$$= y_b'(x)\int\limits_a^x c(t)y_a(t)f(t)\,dt + y_a'(x)\int\limits_x^b c(t)y_b(t)f(t)\,dt = y_b'(x)I_a(x) + y_a'(x)I_b(x);$$

$$z''(x) = y_b''(x)\int\limits_a^x c(t)y_a(t)f(t)\,dt + y_a''(x)\int\limits_x^b c(t)y_b(t)f(t)\,dt +$$
$$+ y_b'(x)c(x)y_a(x)f(x) - y_a'(x)c(x)y_b(x)f(x) = \Big[\text{подставим } c(x)\Big] =$$
$$= y_b''(x)\int\limits_a^x c(t)y_a(t)f(t)\,dt + y_a''(x)\int\limits_x^b c(t)y_b(t)f(t)\,dt +$$
$$+ \underbrace{\frac{y_b'(x)y_a(x) - y_a'(x)y_b(x)}{k(x)\mathrm{W}[y_a,\, y_b](x)}}_{=\frac{1}{k(x)}} f(x) =$$
$$= y''(x)\int\limits_a^x c(t)y_a(t)f(t)\,dt + y_a''(x)\int\limits_x^b c(t)y_b(t)f(t)\,dt + \frac{f(x)}{k(x)} =$$
$$= y_b''(x)I_a(x) + y_a''(x)I_b(x) + \frac{f(x)}{k(x)}.$$

Убедимся, что $z(x)$ – решение уравнения (1): $L\big[z(x)\big] = f(x)$.

$$L\big[z(x)\big] \equiv k(x)z''(x) + k'(x)z'(x) - q(x)z(x) =$$
$$= k(x)y_b''(x)I_a(x) + k(x)y_a''(x)I_b(x) + f(x) +$$
$$+ k'(x)y_b'(x)I_a(x) + k'(x)y_a'(x)I_b(x) - q(x)y_b(x)I_a(x) + y_a(x)I_b(x) =$$
$$= \underbrace{\Big(k(x)y_b''(x) + k'(x)y_b'(x) - q(x)y_b(x)\Big)}_{L\left[y_b(x)\right]=0} I_a(x) +$$
$$+ \underbrace{\Big(k(x)y_a''(x) + k'(x)y_a'(x) - q(x)y_a(x)\Big)}_{L\left[y_a(x)\right]=0} I_b(x) + f(x) \equiv f(x).$$

Проверим выполнение КУ на левом конце. При $x \to a+0$

$$z(x)\Big|_{x\to a+0} = \Big(y_b(x)\underbrace{I_a(x)}_{=0} + y_a(x)I_b(x)\Big)\Big|_{x\to a+0} = y_a(a)I_b(a),$$

$$z'(x)\Big|_{x\to a+0} = \Big(y_b'(x)\underbrace{I_a(x)}_{=0} + y_a'(x)I_b(x)\Big)\Big|_{x\to a+0} = y_a'(a)I_b(a),$$

откуда

$$\Gamma_a\big[z\big] \equiv -z'(a)\sin\alpha + z(a)\cos\alpha = \Big(\underbrace{-y_a'(a)\sin\alpha + y_a(a)\cos\alpha}_{\equiv\Gamma_a\left[y_a\right]=0}\Big)I_b(a) = 0.$$

Краевое условие на правом конце проверяется аналогично. Существование решения, задаваемого равенством (6), доказано.

Единственность решения. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – два решения краевой задачи (1) – (3). Тогда их разность $w(x) = u(x) - v(x)$ удовлетворяет однородной задаче

$$\begin{cases} \mathfrak{L}[w](x) = 0, \qquad x \in [a,\ b], \\ \Gamma_a[w] = 0, \\ \Gamma_b[w] = 0. \end{cases}$$

Но условию теоремы у такой задачи есть только тривиальное решение, т.е. $w(x) \equiv 0$, а значит,

$$u(x) \equiv v(x).$$

$\square$

Замечание 1.1. Из теоремы 1.1 и теоремы 1.3 моментально следует, что при выполнении условий $k(x) \geqslant k_0 > 0$ и $k \in C^1\big[a,\ b\big]$, $q \in C\big[a,\ b\big]$ **функция Грина краевой задачи существует тогда и только тогда, когда однородная краевая задача имеет только тривиальное решение**.

I.4.4. Симметричность функции Грина

Теорема 1.4. ***Пусть*** *существует функция Грина* $G(x,\,t)$ *краевой задачи* (1) – (3).

Тогда $\forall\, x,\ t \in [a,\ b]$ *справедливо равенство* $G(x,\,t) = G(t,\,x)$.

Доказательство.
По формуле (5)

$$G(x,\ t) = \frac{1}{k(t)\mathrm{W}[y_a,\ y_b](t)} \begin{cases} y_a(x)y_b(t), & a \leqslant x \leqslant t; \\ y_b(x)y_a(t), & t \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \tag{5}$$

Убедимся, что множитель $k(t)\mathrm{W}[y_a,\ y_b](t) \equiv \mathrm{const}$. В самом деле, по формуле Остроградского–Лиувилля, Вронскиан двух решений y_1 и y_2 уравнения

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

равен выражению:

$$\mathrm{W}[y_1,\ y_2] = c \cdot e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx}.$$

В нашем случае однородного уравнения (1)

$$\big(k(x)y'(x)\big)' - q(x)y = 0$$

старшие коэффициенты имеют вид $a_0(x) = k(x)$, $a_1(x) = k'(x)$, и мы получаем

$$\mathrm{W}[y_a,\ y_b](x) = c \cdot e^{-\int \frac{k'(x)}{k(x)}\,dx} = \tilde{c} \cdot e^{-\ln k(x)} = \frac{\tilde{c}}{k(x)},$$

откуда

$$k(t)\mathrm{W}[y_a,\ y_b](t) \equiv \mathrm{const}, \qquad \text{в частности,} \qquad k(t)\mathrm{W}[y_a,\ y_b](t) \equiv k(a)\mathrm{W}[y_a,\ y_b](a).$$

Тогда формула (5) приобретает вид

$$G(x,\ t) = \frac{1}{k(a)\mathrm{W}[y_a,\ y_b](a)} \begin{cases} y_a(x)y_b(t), & a \leqslant x \leqslant t; \\ y_b(x)y_a(t), & t \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \tag{8}$$

Отсюда, поменяв x и t ролями, получаем

$$G(t,\ x) = \frac{1}{k(a)\mathrm{W}[y_a,\ y_b](a)} \begin{cases} y_a(t)y_b(x), & a \leqslant t \leqslant x; \\ y_b(t)y_a(x), & x \leqslant t \leqslant b, \end{cases}$$

что, как легко видеть, совпадает с $G(x,\ t)$. $\square$

Замечание 1.2. Мы рассматривали только функции Грина для уравнения $\big(k(x)y'(x)\big)' - q(x)y = 0$. Однако, точно такое же определение можно дать и для уравнения

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

и даже для уравнения n-го порядка

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

с n линейно независимыми краевыми условиями.

При этом сохранятся все свойства функции Грина, кроме симметричности.

Литература

[1] *Антоневич А. Б., Радыно Я В.* **Функциональный анализ и интегральные уравнения**// М., изд-во «Университетское», 1984.

[2] *Васильева А. Б., Тихонов Н. А.* **Интегральные уравнения**// М., Физматлит, 2004.

[3] *Карташёв А. П., Рождественский Б. Л.* **Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления**// М., «Наука», 1986.

[4] *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* **Теория обыкновенных дифференциальных уравнений**// М., Изд-во Иностранной литературы, 1958.

[5] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* **Функциональный анализ**// М., Физматлит, 2006.

[6] *Лизоркин П. И.* **Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа**// М., «Наука», 1981.

[7] *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* **Элементы функционального анализа**// М., «Наука», 1965.

[8] *Наймарк М. А.* **Линейные дифференциальные операторы**// М., «Наука», 1969.

[9] *Понтрягин Л. С.* **Обыкновенные дифференциальные уравнения**// М., «Наука», 1974 (1983).

[10] *Треногин В А.* **Функциональный анализ: Учебник** 3-е изд.// М.,Физматлит, 2002.

[11] *Эльсгольц Л. Э.* **Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление**// М., «Наука», 1969.