Глава II.

Интегральные и операторные уравнения

§ – 1. Понятие метрического пространства. Принцип сжимающих отображений

Важнейшее понятие предела в математике опирается на понятие «близости» точек, т.е. на возможность находить расстояние между ними. На числовой оси расстояние – это модуль разности двух чисел, на плоскости – это хорошо известная формула евклидова расстояния и т.д. Многие факты анализа на используют алгебраических свойств элементов, а опираются лишь на понятие расстояния меду ними. Развитие этого подхода, т.е. выделение «существа», относящегося к понятию предела, приводит к понятию метрического пространства.

Опр. 2.1. Пусть X – множество произвольной природы, а $\rho(x,\, y)$ – действительная функция двух переменных $x,\ y \in \mathrm{X}$, удовлетворяющая трем аксиомам:

1) $\rho(x,\, y) \geqslant 0 \ \ \forall\, x,\ y \in \mathrm{X}$, причем $\rho(x,\, y) = 0$ лишь при $x = y$;

2) $\rho(x,\, y) = \rho(y,\, x)$ (**аксиома симметрии**);

3) $\rho(x,\, z) \leqslant \rho(x,\, y) + \rho(y,\, z)$ (**неравенство треугольника**).

В этом случае множество X с заданной функцией $\rho(x,\, y)$ называют **метрическим пространством (МП)**, а функцию $\rho(x,\, y): \ \mathrm{X} \times \mathrm{X} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющую 1) – 3), – **метрикой** или **расстоянием**.

Приведем некоторые примеры метрических пространств.

Пример 2.1. Пусть $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ с расстоянием $\rho(x,\, y) = \big|x - y\big|$, получим МП $\mathbb{R}^1$.

Пример 2. 2. Пусть $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n = \left\{ \left(x_1, \ \ldots, \ x_n \right) \ \middle| \ x_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, \ n} \right\}$ – множество упорядоченных наборов из n действительных чисел $x = \left(x_1, \ \ldots, \ x_n \right)$ с расстоянием $\rho(x, \ y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(x_k - y_k \right)^2}$, получим n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

Пример 2. 3. Пусть $\mathrm{X} = C\left(\left[a, \ b \right]; \ \mathbb{R}^n \right)$ – множество всех непрерывных на $\left[a, \ b \right]$ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$, т.е. непрерывных вектор-функций, с расстоянием $\rho(f, \ g) = \max\limits_{t \in [a, \ b]} \left| f(t) - g(t) \right|$, где $f = f(t) = \left(f_1(t), \ \ldots, \ f_n(t) \right)$, $g = g(t) = \left(g_1(t), \ \ldots, \ g_n(t) \right)$,

$$\left| f - g \right| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(f_k(t) - g_k(t) \right)^2}\,.$$

Для примеров 2. 1 –2. 3 аксиомы МП проверяются непосредственно, оставим это в качестве упражнения для добросовестного читателя.

Как обычно, если каждому натуральному n поставлен в соответствие элемент $x_n \in \mathrm{X}$, то говорят, что задана **последовательность точек** $\left\{ x_n \right\}$ **МП** $\left(\mathrm{X}, \ \rho \right)$.

Опр. 2. 2. Последовательность точек МП $\left\{ x_n \right\}$ называется **сходящейся к точке** $x \in \mathrm{X}$, если $\lim\limits_{n \to \infty} \rho\left(x_n, \ x \right) = 0$.

Опр. 2. 3. Последовательность $\left\{ x_n \right\}$ называется **фундаментальной**, если для любого

$$\forall \, \varepsilon > 0 \quad \exists \, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall \, n > N, \ p \in \mathbb{N}$$

$$\text{выполняется неравенство} \quad \rho\left(x_{n+p}, \ x_n \right) < \varepsilon,$$

или, что то же самое,

$$\forall \, \varepsilon > 0 \quad \exists \, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall \, m, \ n > N$$

$$\text{выполняется неравенство} \quad \rho\left(x_m, \ x_n \right) < \varepsilon.$$

Опр. 2. 4. МП $\left(\mathrm{X}, \ \rho \right)$ называется **полным (ПМП)**, если любая его фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства.

Примеры. Полнота пространств из примеров 2.1 и 2.2 доказана в курсе математического анализа. Докажем полноту $X = C\left(\left[a,\ b\right];\ \mathbb{R}^n\right)$. Пусть последовательность вектор-функций $\left\{f_n(t)\right\}$ фундаментальна в X, по определению для $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall m,\ n > N \implies \max\limits_{[a,\, b]}\left|f_m(t) - f_n(t)\right| < \varepsilon$.

Поэтому выполнены условия критерия Коши равномерной на $\left[a,\ b\right]$ сходимости функциональной последовательности, т.е. $f_n(t) \overset{[a,\, b]}{\rightrightarrows} f(t)$ при $n \to \infty$. Как известно, предел $f(t)$ в этом случае – непрерывная функция. Докажем, что $f(t)$ – это предел $\left\{f_n(t)\right\}$ в метрике пространства $C\left(\left[a,\ b\right];\ \mathbb{R}^n\right)$. Из равномерной сходимости получим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ и для всех $t \in \left[a,\ b\right]$ выполняется неравенство $\left|f_n(t) - f(t)\right| < \varepsilon$, а так как в левой части неравенства стоит непрерывная функция, то и $\max\limits_{[a,\, b]}\left|f_n(t) - f(t)\right| < \varepsilon$. Это и есть сходимость в $C\left(\left[a,\ b\right];\ \mathbb{R}^n\right)$, следовательно, полнота установлена.

В заключение приведем пример МП, не являющегося полным.

Пример 2.4. Пусть $X = \mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, а расстояние $\rho(x,\ y) = \left|x - y\right|$ – модуль разности двух чисел. Если взять последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$, т.е. $x_1 = 1;\ x_2 = 1,4;\ x_3 = 1,41;\ \ldots$, то, как известно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. При этом данная последовательность сходится в $\mathbb{R}$, значит она фундаментальна в $\mathbb{R}$, а следовательно, она фундаментальна и в $\mathbb{Q}$. Итак, последовательность фундаментальна в Q, но предела, лежащего в Q, не имеет. Пространство не является полным.

Опр. 2.5. Пусть $(X,\ \rho)$ метрическое пространство. Отображение $A:\ X \mapsto X$ называется **сжимающим отображением** или **сжатием**, если $\exists\ \alpha < 1$ такое, что для любых двух точек $x,\ y \in X$ выполняется неравенство:

$$\rho\big(Ax,\ Ay\big) \leqslant \alpha\, \rho(x,\ y). \tag{1}$$

Опр. 2.6. Точка $x^* \in X$ называется **неподвижной точкой отображения** $A:\ X \mapsto X$, если $Ax^* = x^*$.

Замечание 2.1. Всякое сжимающее отображение является **непрерывным**, т.е. любую сходящуюся последовательность $x_n \to x,\ n \to \infty$, переводит в сходящуюся последовательность $Ax_n \to Ax,\ n \to \infty$, а предел последовательности – в предел ее образа.

Действительно, если A – сжимающий оператор, взяв в (1) $y = x_n \xrightarrow{\mathrm{X}} x$, $n \to \infty$, получим, что $Ax_n \xrightarrow{\mathrm{X}} Ax$, $n \to \infty$.

Теорема 2. 1 (Принцип сжимающих отображений)**.**
Пусть X *– полное метрическое пространство, а отображение* $A:\ \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}$ *является сжатием. Тогда* A *имеет и притом единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathrm{X}$ и построим последовательность:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}: \qquad x_n = A^n x = \underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ раз}} x. \tag{2}$$

Проверим, что эта последовательность фундаментальна. В самом деле,

$$\rho\big(x_{n+1},\ x_n\big) = \rho\left(A^{n+1}x,\ A^n x\right) = \alpha^n \rho\big(Ax,\ x\big).$$

Поэтому при любом фиксированном $N \in \mathbb{N}$ и для всех натуральных $n > N$ и $p \in \mathbb{N}$ в силу неравенства треугольника

$$\rho\big(x_{n+p},\ x_n\big) \leqslant \rho\big(x_{n+1},\ x_n\big) + \rho\big(x_{n+2},\ x_{n+1}\big) + \ldots + \rho\big(x_{n+p},\ x_{n+p-1}\big) =$$
$$= \alpha^n \underbrace{\big(1 + \alpha + \ldots + \alpha^p\big)}_{\leqslant \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}} \rho\big(Ax,\ x\big) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, \rho\big(Ax,\ x\big).$$

Так как $\alpha < 1$, правая часть полученного неравенства $\longrightarrow 0$ при $n \to \infty$, поэтому для последовательности $\{x_n\}$ выполнено определение фундаментальности:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N,\ p \in \mathbb{N}$$
$$\text{выполняется неравенство} \quad \rho\big(x_{n+p},\, x_n\big) < \varepsilon$$

$\left(\text{достаточно взять } N = \left[\frac{\ln\left(1-\alpha\right)}{\ln \alpha} \cdot \varepsilon \cdot \rho\big(Ax,\ x\big)\right] + 1\right)$. В силу доказанной фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ и полноты пространства X, предел этой последовательности также принадлежит X:

$$\exists\, x^* \in \mathrm{X}: \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Убедимся, что точка x^* – неподвижная точка отображения A. Действительно,

$$Ax_n = x_{n+1}, \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

С другой стороны, $Ax^* = A\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$ (проверить!), поэтому

$$Ax^* = x^*,$$

т.е. x^* – неподвижная точка.

Докажем её единственность. Для этого предположим, что

$$\exists\, y^* \in \mathrm{X}: \quad Ay^* = y^*.$$

Тогда

$$\rho\left(x^*,\, y^*\right) = \rho\left(Ax^*,\, Ay^*\right) \leqslant \alpha\rho\left(x^*,\, y^*\right).$$

Отсюда

$$\underbrace{(1-\alpha)}_{>0}\,\rho\left(x^*,\, y^*\right) \leqslant 0,$$

что возможно только в случае $x^* = y^*$. □

Приведем обобщение теоремы 2. 1, часто встречающееся в приложениях.

Теорема 2. 2 (Обобщённый принцип сжимающих отображений)**.** *Пусть* X *– полное метрическое пространство, а отображение* $A: \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}$ *таково, что оператор* $B = A^m$ *с некоторым* $m \in \mathbb{N}$ *является сжатием. Тогда* A *имеет и притом единственную неподвижную точку.*

Доказательство. При $m = 1$ получаем теорему 2. 1.

Пусть $m > 1$. Рассмотрим $B = A^m$ $B: \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}$, B – сжатие. По теореме 2. 1 оператор B имеет единственную неподвижную точку x^*. Так как A и B перестановочны $\big(AB = BA\big)$ и так как $Bx^* = x^*$, имеем $B\big(Ax^*\big) = A\big(Bx^*\big) = Ax^*$, т.е. $y^* = Ax^*$ – это тоже неподвижная точка B, а поскольку такая точка по теореме 2. 1 единственна, то $y^* = x^*$ или $Ax^* = x^*$. Отсюда x^* – неподвижная точка оператора A.

Докажем единственность. Предположим, что $\tilde{x} \in \mathrm{X}$ и $A\tilde{x} = \tilde{x}$, тогда $B\tilde{x} = A^m\tilde{x} = A^{m-1}\tilde{x} = \ldots = \tilde{x}$, т.е. $\tilde{x}$ – также неподвижная точка для B, откуда $\tilde{x} = x^*$. Теорема доказана. □

II.1.1. Нормированные пространства. Норма оператора

Частным случаем метрического (метризуемого) пространства является линейное нормированное пространство. Приведем точное определение.

Опр. 2. 7. Пусть X – линейное пространство (действительное или комплексное), на котором определена числовая функция $\big\|x\big\|$, действующая из X в $\mathbb{R}$ и удовлетворяющая аксиомам:

1) Для $\forall\, x \in \mathrm{X}$, $\big\|x\big\| \geqslant 0$, причем $\big\|x\big\| = 0$ лишь при $x = \theta$;

2) Для $\forall\, x \in \mathrm{X}$ и для $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) выполняется $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3) Для $\forall\, x,\ y \in \mathrm{X}$ выполняется $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (**неравенство треугольника**).

Тогда X называется **нормированным пространством**, а функция $\|x\| :\ \mathrm{X} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая 1) – 3), – **нормой**.

В нормированном пространстве можно ввести расстояние между элементами по формуле $\rho(x,\ y) = \|x - y\|$. Выполнение аксиом МП легко проверяется. Если полученное метрическое пространство полно, то соответствующее нормированное пространство называется **Банаховым пространством**.

Часто на одном и том же линейном пространстве можно по-разному ввести норму.

Опр. 2.8. Пусть X – нормированное пространство, и на нём действует оператор $A :\ \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}$. Тогда число

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{3}$$

называется **нормой оператора** A.

Опр. 2.9. Пусть X – нормированное пространство, и на нём действует оператор $A :\ \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}$. Тогда число

$$\|A\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\| \tag{4}$$

называется **нормой оператора** A.

Утверждение 2.1. *Определения 2.8 и 2.9 эквивалентны.*

Доказательство. Действительно, числовые множества

$$M = \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \qquad \text{при} \quad x \neq 0 \right\}$$

и

$$M' = \left\{ \|Ay\| \qquad \text{при} \quad \|y\| = 1 \right\}$$

совпадают:
во-первых, очевидно, $M' \subset M$;
во-вторых,

$$\forall\, x \neq 0 \quad \exists\, y = \frac{x}{\|x\|} : \quad \|y\| = 1, \quad \text{при этом } \|Ay\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

А раз совпадают числовые множества, то совпадают и их точные верхние грани. $\square$

Утверждение 2. 2.

$$\forall\, x \in \mathrm{X} \quad \|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|. \tag{5}$$

Доказательство. Для $x = 0$ – нулевого элемента X – неравенство (5) превращается в равенство и выполняется.

Пусть $x \neq 0$. По определению 2. 8

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Поэтому

$$\forall\, x \neq 0 \quad \|A\| \geqslant \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

$\square$

Утверждение 2. 3. ***Пусть*** *A и B – линейные ограниченные операторы над X.* ***Тогда***

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\|x\| = 1$.

$$\|A(Bx)\| \leqslant \|A\|\|Bx\| \leqslant \|A\|\|B\|\underbrace{\|x\|}_{=1} = \|A\|\|B\|.$$

$\square$

Теорема 2. 3. *Пространство $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ линейных операторов с конечной нормой над полным нормированным пространством X также является полным нормированным линейным пространством.*

Доказательство. Выполнение аксиом линейного пространства и аксиом нормы из определения 2. 7 для $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ проверяется элементарно (см., например, [1], глава V, §–33, с. 179).

Проверим полноту. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, m,\ n > N \qquad \|A_n - A_m\| < \varepsilon.$$

Рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathrm{X}$ и построим по нему последовательность $x_n = A_n x$. Эта последовательность также фундаментальна:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, m,\ n > N$$

$$\|x_n - x_m\| \equiv \|A_n x - A_m x\| \leqslant \|A_n - A_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|.$$

В силу полноты X

$$\exists\, y \in \mathrm{X} : \qquad y = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Теперь введём оператор

$$Ax = y.$$

Проверим, что $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, т.е. что $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$. В неравенстве $\|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|$ правая часть не зависит от m. Перейдём в нём к пределу при $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} \|A_n x - A_m x\| = \lim_{m\to\infty} \|A_n x - x_m\| = \|A_n x - y\| = \|A_n x - Ax\| < \varepsilon \|x\|.$$

Поделив теперь $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon \|x\|$ на $\|x\|$, получим, что

$$\|A_n - A\| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 2. 4. ***Пусть*** $\|A\| < 1$.
Тогда *оператор* $(I - A)$ *обратим и*

$$\exists\, (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \tag{7}$$

причём

$$\left\|(I - A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}, \qquad \left\|I - (I - A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}. \tag{8}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что (7) является обобщением формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1 - q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \qquad |q| < 1.$$

Рассмотрим частичную сумму ряда (7):

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$$

и применим к ней $I - A$:

$$(I - A) S_n = (I - A) \sum_{k=0}^{n} A^k = I - A^{n+1}.$$

Так как $\|A^{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$(I - A)S_n = I - A^{n+1} \to I,$$

т.е. $(I - A) \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k = I$, и данный ряд есть правый обратный оператор к $(I - A)$.

Аналогично,

$$S_n(I - A) = \sum_{k=0}^{n} A^k (I - A) = I - A^{n+1} \to I,$$

откуда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k \, (I - A) = I$, и данный ряд есть левый обратный оператор к $(I - A)$.

Получим формулы (8).

$$\left\|(I - A)^{-1}\right\| = \left\|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k\right\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \|A^k\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Поскольку оператор $\left(I - (I - A)^{-1}\right)$ можно представить в виде

$$I - (I - A)^{-1} = I - \sum_{k=0}^{\infty} A^k = I - I - A - A^2 - \ldots \equiv -A \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

то

$$\|I - (I - A)^{-1}\| = \left\|-A(I - A)^{-1}\right\| \leqslant \|A\| \left\|(I - A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}.$$

$\square$

§ – 2. Классификация интегральных уравнений. Операторные уравнения

Опр. 2.10. Пусть функция $K(x, t)$ ограничена и интегрируема в квадрате $[a, b] \times [a, b]$, а функция $f(x) \in C[a, b]$.

Соотношения

$$y(x) - \lambda \int\limits_a^b K\bigl(x,\ t\bigr)\ y(t)dt = f(x), \tag{9}$$

$$\int\limits_a^b K\bigl(x,\ t\bigr)\ y(t)dt = f(x), \tag{10}$$

$$y(x) - \lambda \int\limits_a^x K\bigl(x,\ t\bigr)\ y(t)dt = f(x), \tag{11}$$

$$\int\limits_a^x K\bigl(x,\ t\bigr)\ y(t)dt = f(x), \tag{12}$$

называются **интегральным уравнением**

- ◇ **Фредгольма II-го рода**,
- ◇ **Фредгольма I-го рода**,
- ◇ **Вольтерры II-го рода**,
- ◇ **Вольтерры I-го рода**, соответственно.

При этом функция $K(x,\ t)$ называется **ядром интегрального уравнения** или **ядром интегрального оператора**, а число λ – **параметром**.

В случае, когда функция правой части $f(x) \equiv 0$, любое из этих уравнений называется **однородным**, в противном случае – **неоднородным**.

Заметим, что уравнения Фредгольма II-го рода и Вольтерры II-го рода имеют общую структуру

$$y + \lambda Ay = f,$$

где A – некоторый интегральный оператор, а уравнения Фредгольма I-го рода и Вольтерры I-го рода имеют общую структуру

$$Ay = f,$$

где A – аналогичный оператор.

Кроме того, надо отметить, что интегральные уравнения Вольтерры являются частными случаями интегральных уравнений Фредгольма с (вообще говоря, разрывным) ядром

$$K_1(x,\ t) = \begin{cases} K(x,\ t), & a \leqslant t \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & a \leqslant x \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Опр. 2.11. Соотношения

$$y - \lambda A\, y = f, \tag{13}$$
$$A\, y = f, \tag{14}$$

рассматриваемые в некотором метрическом пространстве, называются **операторным уравнением**

- ◇ **Фредгольма II-го рода**,
- ◇ **Фредгольма I-го рода**, соответственно.

По данному определению интегральные уравнения Вольтерры, если их рассматривать как операторные уравнения, являются операторными уравнениями Фредгольма.

Опр. 2.12. Числа λ, при которых однородное уравнение

$$y - \lambda A\, y = 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \lambda A\, y \tag{15}$$

имеет нетривиальное решение, называются **характеристическими числами оператора** A, а всё множество таких λ называется **спектром оператора** A.

Замечание 2.2. Легко заметить, что если характеристическое число λ не равно нулю, то число $\frac{1}{\lambda}$ есть собственное число оператора A:

$$A\, y = \frac{1}{\lambda}\, y.$$

И наоборот, если число $\mu \neq 0$ – собственное число оператора A, то число $\frac{1}{\mu}$ есть характеристическое число оператора A.

§ – 3. Уравнение Вольтерры

II.3.1. Однозначная разрешимость уравнения Вольтерры

Рассмотрим уравнение Вольтерры II-го рода:

$$y(x) - \lambda \int\limits_a^x K\big(x,\ t\big)\ y(t)dt = f(x). \tag{11}$$

Теорема 2.5.
Пусть $f(x) \in C\big[a,\ b\big]$, *а* $K(x,\ t)$ *непрерывна в треугольнике*

$T = \Big\{ \big(x,\ t\big) \ \Big| \quad a \leqslant t \leqslant x \leqslant b \Big\}.$

Тогда $\forall\, \lambda$ *существует и притом единственное решение уравнения* (11), *это решение непрерывно и может быть получено методом последовательных приближений.*

Доказательство. Построим функциональную последовательность $\big\{y_n\big\}_{n=0}^{\infty}$ по формулам:

$$y_0 \equiv 0, \qquad y_{n+1}(x) = \lambda \int\limits_a^x K\big(x,\ t\big)\ y_n(t)dt + f(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{16}$$

Представим $y_n(x)$ в виде частичной суммы ряда:

$$y_n = y_0 + \big(y_1 - y_0\big) + \big(y_2 - y_1\big) + \ldots + \big(y_n - y_{n-1}\big) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(y_k - y_{k-1}\big). \tag{17}$$

В силу непрерывности функций $f(x)$ и $K(x,\ t)$ найдутся числа M и F такие, что

$$M = \sup_{(x,\,t)\in T} \big|K(x,\ t)\big|, \qquad F = \sup_{x\in[a,\,b]} \big|f(x)\big|.$$

Тогда модуль общего члена ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \big(y_k - y_{k-1}\big)$ оценивается так:

$$\begin{aligned}
&\big|y_1 - y_0\big| = \big|f\big| \leqslant F,\\
&\big|y_2 - y_1\big| = \big|\lambda\big| \ \left| \int\limits_a^x K\big(x,\ t\big)\ \big(y_1(t) - y_0(t)\big)\, dt \right| \leqslant \big|\lambda\big|\ MF\ (x-a),\\
&\big|y_3 - y_2\big| = \big|\lambda\big| \ \left| \int\limits_a^x K\big(x,\ t\big)\ \big(y_2(t) - y_1(t)\big)\, dt \right| \leqslant \big|\lambda\big|^2\ M^2F\ \frac{(x-a)^2}{2},\\
&\ldots\\
&\big|y_{k+1} - y_k\big| = \big|\lambda\big| \ \left| \int\limits_a^x K\big(x,\ t\big)\ \big(y_k(t) - y_{k-1}(t)\big)\, dt \right| \leqslant \big|\lambda\big|^k\ M^kF\ \frac{(x-a)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Итак,

1) общий член ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \big(y_k - y_{k-1}\big)$ мажорируется общим членом числового ряда $F\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\big|\lambda\big|^k M^k (x-a)^k}{k!}$;

2) числовой ряд $F\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\left|\lambda\right|^{k}M^{k}(x-a)^{k}}{k!}$ является сходящимся:

$$F\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|\lambda\right|^{k}M^{k}(x-a)^{k}}{k!}=F\left(e^{\left|\lambda\right|M(x-a)}-1\right).$$

По признаку Вейерштрасса, это означает, что

◇ функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(y_k-y_{k-1}\right)$ сходится абсолютно и равномерно на $x\in[a,\ b]$.

Обозначим его сумму через

$$\varphi(x)=y_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(y_k-y_{k-1}\right). \tag{18}$$

Поскольку члены ряда – непрерывные на $x\in[a,\ b]$ функции, то из равномерной сходимости следует, что

◇ сумма ряда $\varphi(x)\in C[a,\ b]$.

Убедимся, что $\varphi(x)$ – решение (11).

Так как ряд (а значит, и последовательность (16)) сходится равномерно на $x\in[a,\ b]$, то его (её) можно интегрировать почленно, и в равенстве (16) можно перейти к пределу при $n\to\infty$. Получим:

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x K\left(x,\ t\right)\,\varphi(t)dt+f(x),$$

◇ то есть $\varphi(x)$ – решение (11).

Теперь проверим, что других решений нет. Пусть $\psi(x)$ – тоже решение (11). Обозначим

$$\chi(x)=\varphi(x)-\psi(x),\qquad X=\sup_{x\in[a,\ b]}\left|\chi(x)\right|.$$

Проведём последовательные оценки для $\left|\chi\right|$, учитывая, что она является решением однородного уравнения

$$\chi(x)-\lambda\int_a^x K\left(x,\ t\right)\,\chi(t)dt=0.$$

$$\left|\chi\right| = \left|\lambda\right| \left|\int\limits_a^x K\big(x,\ t\big)\ \chi(t)\,dt\right| \leqslant \left|\lambda\right|\ MX\ (x-a),$$

$$\left|\chi\right| \leqslant \left|\lambda\right| \left|\int\limits_a^x K\big(x,\ t\big)\ \chi(t)\,dt\right| \leqslant \left|\lambda\right|^2\ M^2 X\ \int\limits_a^x (t-a)\,dt = \left|\lambda\right|^2\ M^2 X\ \frac{(x-a)^2}{2},$$

$\ldots$

$$\left|\chi\right| \leqslant \left|\lambda\right| \left|\int\limits_a^x K\big(x,\ t\big)\ \chi(t)\,dt\right| \leqslant \left|\lambda\right|^k\ M^k X\ \frac{(x-a)^k}{k!},$$

$\ldots$

Поскольку $\left|\chi\right| \leqslant X\left|\lambda\right|^k\ M^k\ \frac{(x-a)^k}{k!} \leqslant X\left|\lambda\right|^k\ M^k\ \frac{(b-a)^k}{k!}$, а отсюда,

$$X \leqslant X\left|\lambda\right|^k\ M^k\ \frac{(b-a)^k}{k!},$$

имеем, что

- либо $X = 0$ и единственность доказана;

- либо $X > 0$ и тогда на него можно поделить:

$$1 \leqslant \left|\lambda\right|^k\ M^k\ \frac{(b-a)^k}{k!}.$$

  Однако правая часть стремится к нулю при $k \to \infty$, и такое неравенство при всех $k \in \mathbb{N}$ невозможно. Следовательно, данный случай исключён.

Итак, $X = 0$, $\chi(x) \equiv 0$, $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, и единственность также доказана. $\square$

II.3.2. Резольвента для уравнения Вольтерры

Обозначим через A интегральный оператор Вольтерры:

$$Ay = \int\limits_a^x K\big(x,\ t\big)\ y(t)dt. \tag{19}$$

Выведем аналогичное представление для степеней этого оператора A^n:

$$A^2 y = \int_a^x K\big(x,\ t\big)\ Ay\ dt = \int_a^x K\big(x,\ t\big)\ dt \int_a^t K\big(t,\ s\big)\ y(s)ds =$$

$$= \int_a^x y(s)ds \underbrace{\int_s^x K\big(x,\ t\big)\ K\big(t,\ s\big)\ dt}_{=K_2(x,\ s)} = \int_a^x K_2\big(x,\ s\big)\ y(s)ds,$$

$$A^3 y = \int_a^x K\big(x,\ t\big)\ A^2 y\ dt = \int_a^x K\big(x,\ t\big)\ dt \int_a^t K_2\big(t,\ s\big)\ y(s)ds =$$

$$= \int_a^x y(s)ds \underbrace{\int_s^x K\big(x,\ t\big)\ K_2\big(t,\ s\big)\ dt}_{=K_3(x,\ s)} = \int_a^x K_3\big(x,\ s\big)\ y(s)ds$$

и так далее. Таким образом,

$$A^n y = \int_a^x K_n\big(x,\ t\big)\ y(t)dt, \tag{20}$$

где

$$K_1\big(x,\ t\big) \equiv K\big(x,\ t\big), \qquad K_n\big(x,\ t\big) = \int_t^x K\big(x,\ s\big)\ K_{n-1}\big(s,\ t\big)\ ds. \tag{21}$$

Теперь в равенстве (18), дающем решение интегрального уравнения Вольтерры II-го рода:

$$\varphi(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(y_k - y_{k-1}\big), \tag{18}$$

выразим общий член ряда:

$$y_k - y_{k-1} = \lambda \int_a^x K\big(x,\ t\big)\ \big(y_{k-1}(t) - y_{k-2}(t)\big)\ dt \equiv \lambda A\big(y_{k-1} - y_{k-2}\big) \equiv$$

$$\equiv \lambda^2 A^2\big(y_{k-2} - y_{k-3}\big) = \ldots = \lambda^{k-1} A^{k-1}\big(\underbrace{y_1}_{\equiv f} - \underbrace{y_0}_{\equiv 0}\big) \equiv \lambda^{k-1} A^{k-1} f.$$

Поэтому для y_n из (16) и для решения (18) уравнения (11) получаем новое представление:

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k A^k f, \tag{22}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^k f = f + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k f. \tag{23}$$

Учитывая (20), равенство (23) переписывается в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int\limits_a^x K_k\big(x,\ t\big)\ f(t)\ dt. \tag{24}$$

Поскольку в доказательстве теоремы 2.5 было получено, что данный ряд сходится равномерно на $x \in [a,\ b]$, в нём можно менять местами интегрирование и суммирование:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int\limits_a^x K_k\big(x,\ t\big)\ f(t) dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_a^x f(t)\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K_k\big(x,\ t\big)\ dt.$$

Если обозначить ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K_k\big(x,\ t\big)$ через $R\big(x,\ t,\ \lambda\big)$:

$$R\big(x,\ t,\ \lambda\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K_k\big(x,\ t\big), \tag{25}$$

то для решения (18) уравнения (11) имеем представление:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^x R\big(x,\ t,\ \lambda\big)\ f(t)\ dt. \tag{26}$$

Функция $R\big(x,\ t,\ \lambda\big)$, заданная формулой (25), называется **резольвентой** или **разрешающим ядром** интегрального уравнения Вольтерры II-го рода.

II.3.3. Связь уравнения Вольтерры с задачей Коши

Рассмотрим задачу Коши для линейного ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{27}$$

Проинтегрировав уравнение $y' = -a(x)\,y + b(x)$, получим с учётом начального условия

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \big(-a(t)\big)\; y(t)\,dt + \int\limits_{x_0}^{x} b(t)\,dt$$

или, если обозначить $f = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} b(t)\,dt$, а $K(x,\ t) = -a(t)$,

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\ t)\; y(t)\,dt + f(x).$$

Наоборот, если $K(x,\ t) \equiv K_1(x)K_2(t) \in C\left(\big[a,\ b\big] \times \big[a,\ b\big]\right)$, $K_1(x) \neq 0$, $K_1(x) \in C^1\big[x_0,\ x_1\big]$, а $f(x) \in C\big[a,\ b\big]$, то уравнение

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\ t)\; y(t)\,dt + f(x)$$

можно продифференцировать:

$$y'(x) = K_1(x)K_2(x)y(x) + K_1'(x)\int\limits_{x_0}^{x} K_2(t)\; y(t)\,dt + f'(x) =$$

$$= K_1(x)K_2(x)y(x) + \frac{K_1'(x)}{K_1(x)}\big(y(x) - f(x)\big) + f'(x) = -a(x)y(x) + b(x),$$

где

$$a(x) = -K_1(x)K_2(x) - \frac{K_1'(x)}{K_1(x)}, \qquad b(x) = f'(x) + \frac{K_1'(x)}{K_1(x)}\, f(x). \tag{28}$$

При этом $y_0 = f(x_0)$. Таким образом, для некоторых классов ядер $K(x,\ t)$ имеет место **эквивалентность** уравнения Вольтерры II-го рода и задачи

Коши для линейного ОДУ первого порядка. Более точно, имеет место теорема:

Теорема 2. 6.
Пусть $K(x,\ t) \equiv K_1(x)K_2(t) \in C\left([x_0,\ x_1] \times [x_0,\ x_1]\right)$, $K_1(x) \neq 0$, $K_1(x) \in C^1[x_0,\ x_1]$, $f(x) \in C^1[x_0,\ x_1]$, $y_0 = f(x_0)$.
Тогда *уравнение Вольтерры* II*-го рода*

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\ t)\, y(t)\, dt + f(x)$$

эквивалентно задаче Коши

$$\begin{cases} y\,'(x) + a(x)\, y(x) = b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

т.е. каждое решение задачи Коши есть решение уравнения Вольтерры II*-го рода и наоборот, каждое решение уравнения Вольтерры* II*-го рода есть решение задачи Коши с* $a(x)$ *и* $b(x)$, *задаваемыми равенствами* (28).

Замечание 2. 3.
Общей задаче Коши для уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной

$$\begin{cases} y\,'(x) = f\big(x,\ y(x)\big), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

эквивалентно нелинейное интегральное уравнение:

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(t,\ y(t)\big)\, dt.$$

§ – 4. Альтернатива Фредгольма

II.4.1. Резольвента для уравнения Фредгольма

Обозначим через A интегральный оператор Фредгольма:

$$Ay = \int\limits_{a}^{b} K\big(x,\ t\big)\ y(t)dt. \tag{29}$$

Выведем аналогичное представление для степеней этого оператора A^n:

$$A^2 y = \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\ Ay\ dt = \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\ dt \int\limits_a^t K\big(t,\ s\big)\ y(s)ds =$$

$$= \int\limits_a^b y(s)ds \underbrace{\int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\ K\big(t,\ s\big)\ dt}_{=K_2(x,\ s)} = \int\limits_a^b K_2\big(x,\ s\big)\ y(s)ds,$$

$$A^3 y = \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\ A^2 y\ dt = \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\ dt \int\limits_a^t K_2\big(t,\ s\big)\ y(s)ds =$$

$$= \int\limits_a^b y(s)ds \underbrace{\int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\ K_2\big(t,\ s\big)\ dt}_{=K_3(x,\ s)} = \int\limits_a^b K_3\big(x,\ s\big)\ y(s)ds$$

и так далее. Таким образом,

$$A^n y = \int\limits_a^b K_n\big(x,\ t\big)\ y(t)dt, \tag{30}$$

где

$$K_1\big(x,\ t\big) \equiv K\big(x,\ t\big), \qquad K_n\big(x,\ t\big) = \int\limits_a^b K\big(x,\ s\big)\ K_{n-1}\big(s,\ t\big)\ ds. \tag{31}$$

Теперь в силу теоремы 2.4 при $\big|\lambda\big|\big\|A\big\| < 1$ оператор $\big(I - \lambda A\big)$ обратим и

$$\exists\ \big(I - \lambda A\big)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^k, \tag{7}$$

и для решения уравнения (9) получаем новое представление:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^k f = f + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k f. \tag{32}$$

Учитывая (30), равенство (32) переписывается в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int\limits_a^x K_k\big(x,\ t\big)\ f(t)\ dt. \tag{33}$$

Этот ряд сходится равномерно на $x \in [a,\ b]$, что доказывается как в теореме 2. 5[1], поэтому в нём можно менять местами интегрирование и суммирование:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int\limits_a^b K_k\big(x,\ t\big)\ f(t)dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_a^b f(t)\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K_k\big(x,\ t\big)\ dt.$$

Если обозначить ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K_k\big(x,\ t\big)$ через $R\big(x,\ t,\ \lambda\big)$:

$$R\big(x,\ t,\ \lambda\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K_k\big(x,\ t\big), \tag{34}$$

то для решения (33) уравнения (9) имеем представление:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R\big(x,\ t,\ \lambda\big)\ f(t)\ dt. \tag{35}$$

Функция $R\big(x,\ t,\ \lambda\big)$, заданная формулой (34), называется **резольвентой** или **разрешающим ядром** интегрального уравнения Фредгольма II-го рода. Итак,

$$\big(I - \lambda A\big)^{-1} f = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R\big(x,\ t,\ \lambda\big)\ f(t)\ dt \qquad \text{при} \quad \big|\lambda\big|\big\|A\big\| < 1. \tag{36}$$

---

[1] Оценка для общего члена $\varphi_k(x)$ данного ряда будет иметь вид $\big|\varphi_k(x)\big| \leqslant F \cdot \big|\lambda\big|^k M^k (b-a)^k$, и при $\big|\lambda\big| M(b-a) < 1$ числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} F \cdot \big|\lambda\big|^k M^k (b-a)^k = \frac{F}{1-|\lambda| M(b-a)}$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

II.4.2. Уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

Рассмотрим уравнения Фредгольма II-го рода:

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{37}$$

$$\psi(x) - \lambda \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\,\psi(t)\,dt = 0 \tag{38}$$

с ядром $K(x,\ t) \in C\left(\big[a,\ b\big] \times \big[a,\ b\big]\right)$.

Опр. 2.13. Ядро $K(x,\ t)$ называется **вырожденным**, если оно представимо в виде конечной суммы произведений функций, зависящих только от x, на функции, зависящих только от t:

$$K(x,\ t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t). \tag{39}$$

Лемма 2.1 (об эквивалентности).
Пусть $a_k(x),\ b_k(t),\ f(x) \in C\big[a,\ b\big],\ \ \lambda \neq 0.$
Тогда *уравнение Фредгольма* II*-го рода* (37) *эквивалентно СЛАУ* (41) *с коэффициентами* (42), *т.е. имеют место следующие утверждения:*

1) Всякое решение $\varphi(x)$ *уравнения* (37) *представимо в виде*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(x), \tag{40}$$

где c_k *являются решением СЛАУ*

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \frac{1}{\lambda} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \frac{1}{\lambda} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \tag{41}$$

где коэффициенты α_{ij} *и* β_i *вычисляются по формулам*

$$\alpha_{ij} = \int\limits_a^b a_j(s) b_i(s)\,ds, \qquad \beta_i = \int\limits_a^b b_i(s) f(s)\,ds. \tag{42}$$

2) Наоборот, всякому решению c_k СЛАУ (41) с коэффициентами (42) соответствует решение $\varphi(x)$ уравнения (37) вида (40).

Доказательство. Перенесём интегральное слагаемое в уравнении

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

в правую часть:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\,\varphi(t)\,dt$$

и учтём вид вырожденного ядра

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \underbrace{\int\limits_a^b b_k(t)\,\varphi(t)\,dt}_{=c_k \text{ не зависят от } x}.$$

Таким образом, равенство (40) получено.

Чтобы найти числа c_k, поменяем в нём x на t, а индекс суммирования k на j и подставим его в каждое из равенств

$$c_k = \int\limits_a^b b_k(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Получим

$$c_k = \int\limits_a^b b_k(t)\,\underbrace{\Big(f(t) + \lambda \sum_{j=1}^n c_j a_j(t)\Big)}_{=\varphi(t)}\,dt =$$

$$= \underbrace{\int\limits_a^b b_k(t) f(t)\,dt}_{=\beta_k} + \lambda \sum_{j=1}^n c_j \underbrace{\int\limits_a^b b_k(t) a_j(t)\,dt}_{=\alpha_{jk}}$$

или, короче,

$$c_k = \beta_k + \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} c_j, \qquad j,\ k \in \overline{1,\ n}.$$

Записав последнее равенство в матричном виде, получим (41).

Теперь обратим внимание, что проведённые выкладки означают, что *если* $\varphi(x)$ *– решение* (37)*, то его можно записать в виде* (40)*, причём где* c_k *являются решением СЛАУ* (41) *с коэффициентами* (42). Иначе говоря, выполняется утверждение 1) леммы.

С другой стороны, вычислив по заданному ядру $K(x,\ t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(t)$ коэффициенты (42), мы можем обратить все выкладки и прийти к выводу, что *функция* $\varphi(x)$*, вычисленная о формуле* (40)*, обязана удовлетворять уравнению* (37). Иными словами, выполняется утверждение 2) леммы. $\square$

Из этой принципиальной леммы сразу следует, что к уравнению Фредгольма с вырожденным ядром применима вся теория разрешимости СЛАУ. В частности, сразу получаются следующие теоремы.

Теорема 2. 7 (Альтернатива Фредгольма)**.**

Пусть $a_k(x),\ b_k(t),\ f(x) \in C\big[a,\ b\big],\ \ \lambda \neq 0,$ *а* $K(x,\ t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(t)$ *– вырожденное ядро.*

Тогда: $\forall\ f(x) \in C\big[a,\ b\big]\ \ \exists!\ \varphi(x)$: (37) $\Longleftrightarrow$ (38) *имеет только тривиальное решение* $\psi \equiv 0$.

Суть данной теоремы в том, что существование единственного решения (37) равносильно отличию от нуля определителя матрицы в (41). Следующая теорема относится к случаю, когда этот определитель равен нулю.

Теорема 2. 8.

Пусть $a_k(x),\ b_k(t),\ f(x) \in C\big[a,\ b\big],\ \ \lambda \neq 0,$ *а* $K(x,\ t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(t)$ *– вырожденное ядро.*

Пусть, *кроме того,* $\{\psi_l\}_{l=1}^{m}$ *– ФСР однородного уравнения* (38).

Тогда *уравнение* (37)

либо имеет бесконечно много решений

$$\varphi(x) = \varphi_{чно}(x) + \sum_{l=1}^{m} \varkappa_l \psi_l(x), \qquad \varkappa_l \in \mathbb{R},$$

либо не имеет решений вообще.

Замечание 2. 4.

Случай, когда уравнение (37) имеет бесконечно много решений

$$\varphi(x) = \varphi_{чно}(x) + \sum_{l=1}^{m} \varkappa_l \psi_l(x),$$

реализуется, если функция $f(x)$ ортогональна в смысле скалярного произведения $\big(f,\ \psi\big) = \int\limits_a^b f(x)\psi(x)\ dx$ всем решениям *сопряжённого* однородного уравнения

$$\psi(x) - \lambda \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \int\limits_a^b a_k(t)\,\psi(t)\,dt = 0.$$

Если же для какого-либо решения $\psi(x)$ этого уравнения $\big(f,\ \psi\big) \neq 0$ уравнение (37) не имеет решений вообще. Доказательство этих фактов можно посмотреть, например, в [6], гл. 9, §. 2.

II.4.3. Лемма об аппроксимации

Лемма 2. 2.
Пусть $f(x,\ t) \in C\big(\big[a,\ b\big] \times \big[a,\ b\big]\big)$.
Тогда: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N}$ *и функция* $f_\varepsilon(x,\ t)$ *такая, что*

$$f(x,\ t) = \sum_{i,j=-n}^{n} f_{ij} \cos\frac{\pi i(x-a)}{l} \cos\frac{\pi j(t-a)}{l} + f_\varepsilon(x,\ t), \qquad \big|f_\varepsilon\big| < \varepsilon, \quad (43)$$

$$f_{ij} = \frac{1}{l^2} \int\limits_a^{a+l} \int\limits_a^{a+l} \tilde{f}(x,\ t)\ \cos\frac{\pi i(x-a)}{l} \cos\frac{\pi j(t-a)}{l}\ dx\,dy, \qquad (44)$$

а $l > b - a$ *– любое наперёд выбранное число.*

Доказательство.
Продолжим по непрерывности функцию $f(x,\ t)$, определённую на $\big[a,\ b\big] \times \big[a,\ b\big]$, на больший квадрат:

$$D = \big[a - l,\ a + l\big] \times \big[a - l,\ a + l\big]$$

с любым наперёд заданным $l > b - a$. А именно, пусть

$$\tilde{f}(x,\ t) = \begin{cases} f(x,\ t), & a \leqslant x, t \leqslant b; \\ f(b,\ t), & a \leqslant t \leqslant b, \quad b \leqslant x \leqslant a + l; \\ f(x,\ b), & b \leqslant t \leqslant a + l, \quad a \leqslant x \leqslant b; \\ f(b,\ b), & b \leqslant x, t \leqslant a + l, \end{cases}$$

а при $x \in \big[a - l,\ a\big]$ и $t \in \big[a - l,\ a\big]$ она пусть определяется как чётное отражение относительно границ $x = a$ и $t = a$.

Легко видеть, что так заданная функция $\tilde{f}(x,\ t) \in C\left(\left[a,\ a+l\right] \times \left[a,\ a+l\right]\right)$.

Из курса функциональных рядов известно, что любая непрерывная в квадрате D функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье по косинусам

$$(x,\ t) = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} f_{ij} \cos\frac{\pi i(x-a)}{l} \cos\frac{\pi j(t-a)}{l}, \qquad \left|f_\delta\right| < \delta,$$

$$f_{ij} = \frac{1}{l^2} \int\limits_a^{a+l} \int\limits_a^{a+l} \tilde{f}(x,\ t)\ \cos\frac{\pi i(x-a)}{l} \cos\frac{\pi j(t-a)}{l}\ dx\, dy,$$

и этот ряд сходится к $\tilde{f}(x,\ t)$ **равномерно** на любой замкнутой подобласти D, не содержащей точек разрыва $2l$-периодического продолжения, и в частности – в исходном квадрате $\left[a,\ b\right] \times \left[a,\ b\right]$.

Равномерная сходимость по определению означает, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, N \in \mathbb{N}:\ \ \forall\, n > N,\ \ \forall\, (x,\ t) \in \left[a,\ b\right] \times \left[a,\ b\right]$$

выполняется неравенство

$$\left|\underbrace{\tilde{f}(x,\ t)}_{\equiv f} - \sum_{i,j=-n}^{n} f_{ij} \cos\frac{\pi i(x-a)}{l} \cos\frac{\pi j(t-a)}{l}\right| < \varepsilon.$$

Если разность, стоящую под знаком модуля обозначить за $f_\varepsilon(x,\ t)$, получаем утверждение леммы. $\square$

II.4.4. Норма интегрального оператора

В пространстве функций $C\left[a,\ b\right]$ естественна норма

$$\left\|\varphi\right\| = \max_{x \in \left[a,\, b\right]} \left|\varphi(x)\right|,$$

а в $C\left(\left[a,\ b\right] \times \left[a,\ b\right]\right)$, соответственно

$$\left\|K\right\| = \max_{x,\, t \in \left[a,\, b\right]} \left|K(x,\ t)\right|.$$

Тогда норма интегрального оператора

$$A\varphi = \int\limits_a^b K(x,\ t)\varphi(t)\ dt$$

будет, как супремум по всем функциям $\varphi(x)$ с нормой $\|\varphi\| = 1$ выражения,

$$\|A\varphi\| = \max_{x\in[a,\,b]} \left| \int_a^b K(x,\ t)\varphi(t)\ dt \right|.$$

При этом, в силу неравенства

$$\max_{x\in[a,\,b]} \left| \int_a^b K(x,\ t)\varphi(t)\ dt \right| \leqslant \max_{x,\,t\in[a,\,b]} K(x,\ t)\cdot \max_{t\in[a,\,b]} \varphi(t)\cdot \int_a^b dt = \|K\|\cdot\|\varphi\|\cdot(b-a),$$

откуда

$$\|A\| \leqslant \|K\| \cdot (b-a). \tag{45}$$

II.4.5. Альтернатива Фредгольма. Общий случай

Рассмотрим уравнения Фредгольма II-го рода:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{46}$$

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x,\ t)\,\psi(t)\,dt = 0, \tag{47}$$

зафиксируем некоторое λ и обозначим линейный оператор:

$$A\varphi = \int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Тогда равенства (46), (47) перепишутся в виде

$$\varphi - \lambda A\varphi = f, \tag{48}$$

$$\psi - \lambda A\psi = 0. \tag{49}$$

Теорема 2. 9.
Пусть $K(x,\ t) \in C\left([a,\ b] \times [a,\ b]\right)$.
Тогда: $\forall\ f(x) \in C[a,\ b]\quad \exists!\ \varphi(x)\ :\ (48) \iff (49)$ *имеет только тривиальное решение* $\psi \equiv 0$.

Доказательство.
Для $\lambda = 0$ утверждение теоремы тривиально проверяется: уравнения (48), (49) оба имеют единственные решения $\varphi \equiv f$ и $\psi \equiv 0$. Поэтому будем рассматривать только случай $\lambda \neq 0$.

В силу леммы 2.2 об аппроксимации $\forall\, \varepsilon > 0$ ядро $K(x,\ t)$ можно представить в виде:

$$K(x,\ t) = \underbrace{\sum_{m=1}^{n} a_m(x) b_m(t)}_{S_n(x,\,t)} + K_\varepsilon(x,\ t) : \qquad \bigl|K_\varepsilon\bigr| \leqslant \varepsilon, \quad n = n(\varepsilon).$$

Соответствующие этим ядрам операторы обозначим A_n и A_ε, соответственно:

$$A_n\varphi = \int\limits_a^b S_n(x,\ t)\ \varphi(t)\, dt, \qquad A_\varepsilon\varphi = \lambda \int\limits_a^b K_\varepsilon(x,\ t)\ \varphi(t)\, dt.$$

По $\forall\, \delta > 0$ выберем $\varepsilon = \frac{\delta}{|\lambda|\bigl(b-a\bigr)}$. Тогда в силу (45)

$$\bigl|\lambda\bigr| \bigl\|A_\varepsilon\bigr\| \leqslant \varepsilon \cdot \bigl|\lambda\bigr|(b-a) = \delta$$

и мы можем выбрать δ и ε такими, чтобы

$$\bigl|\lambda\bigr| \bigl\|A_\varepsilon\bigr\| < 1. \tag{50}$$

В таком случае, в силу теоремы 2.4 оператор $\bigl(I - \lambda A_\varepsilon\bigr)$ обратим и

$$\Bigl\|\bigl(I - \lambda A_\varepsilon\bigr)^{-1}\Bigr\| \leqslant \frac{1}{1 - \bigl|\lambda\bigr| \bigl\|A_\varepsilon\bigr\|}. \tag{8}$$

Тогда, переписав уравнение (46)

$$\varphi - \lambda A_n\varphi - \lambda A_\varepsilon\varphi = f$$

в виде

$$\varphi - \lambda A_\varepsilon\varphi = f + \lambda A_n\varphi,$$

подействуем на обе его части оператором $\bigl(I - \lambda A_\varepsilon\bigr)^{-1}$:

$$\varphi = \bigl(I - \lambda A_\varepsilon\bigr)^{-1}\bigl(f + \lambda A_n\varphi\bigr) = \underbrace{\bigl(I - \lambda A_\varepsilon\bigr)^{-1} f}_{\tilde f} + \bigl(I - \lambda A_\varepsilon\bigr)^{-1}\lambda A_n\varphi.$$

Учитывая, что

$$\left(I-\lambda A_\varepsilon\right)^{-1}F=F(x)+\lambda\int\limits_a^b R_\varepsilon\left(x,\ t,\ \lambda\right)\ F(t)\,dt, \tag{36}$$

где $R_\varepsilon\left(x,\ t,\ \lambda\right)$ – резольвента оператора λA_ε, а $K_{\varepsilon\,k}\left(x,\ t\right)$ – итерированные ядра (31) для оператора λA_ε, то

$$\left(I-\lambda A_\varepsilon\right)^{-1}\lambda A_n\varphi=\lambda A_n\varphi+\lambda^2\int\limits_a^b R_\varepsilon\left(x,\ t,\ \lambda\right)\ \left(A_n\varphi\right)(t)\,dt=$$

$$=\lambda A_n\varphi+\lambda^2\int\limits_a^b R_\varepsilon\left(x,\ t,\ \lambda\right)\ \int\limits_a^b K_n(t,\ s)\varphi(s)\,ds\,dt=$$

$$=\lambda A_n\varphi+\lambda^2\sum_{k=1}^n\int\limits_a^b a_k(t)\,R_\varepsilon\left(x,\ t,\ \lambda\right)\ \int\limits_a^b b_k(s)\varphi(s)\,ds\,dt=$$

$$=\lambda A_n\varphi+\sum_{k=1}^n\int\limits_a^b \underbrace{\lambda^2\int\limits_a^b a_k(t)\,R_\varepsilon\left(x,\ t,\ \lambda\right)dt}_{\tilde a_k(x)}\, b_k(s)\varphi(s)ds=$$

$$=\lambda A_n\varphi+\sum_{k=1}^n\int\limits_a^b \tilde a_k(x)\,b_k(s)\,\varphi(s)ds.$$

Итак, мы получили, что уравнение (46) $\varphi-\lambda A_n\varphi-\lambda A_\varepsilon\varphi=f$ эквивалентно уравнению

$$\varphi=\tilde f+\lambda A_n\varphi+\sum_{k=1}^n\int\limits_a^b \tilde a_k(x)\,b_k(s)\,\varphi(s)ds\quad -$$

– уравнению с вырожденным ядром. Поэтому к нему применимы результаты пункта II.4.2, в частности Альтернатива Фредгольма. □

Замечание 2.5. Альтернативу Фредгольма можно переписать множеством разных эквивалентных способов. Один из них, из-за которого данная теорема и получила название «Альтернатива», приведён ниже:

Теорема 2. 10.
Пусть $K(x,\ t) \in C\left(\left[a,\ b\right] \times \left[a,\ b\right]\right)$. ***Тогда:***
I ***либо*** *уравнение* (48) *однозначно разрешимо при любой правой части* $f(x) \in C\left[a,\ b\right]$;
II ***либо*** *уравнение* (49) *имеет нетривиальное решение.*

§ – 5. Уравнения Фредгольма с симметричным ядром

II.5.1. Основные понятия

Рассмотрим уравнения Фредгольма II-го рода:

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K\left(x,\ t\right) \varphi(t)\, dt = f(x), \tag{51}$$

$$\psi(x) - \lambda \int\limits_a^b K\left(x,\ t\right) \psi(t)\, dt = 0 \tag{52}$$

с непрерывным ядром $K\left(x,\ t\right)$ и непрерывной правой частью $f(x)$.

Опр. 2. 14. Ядро $K\left(x,\ t\right)$ интегрального оператора Фредгольма называется **симметричным**, если $\forall\, x,\ t \in \left[a,\ b\right]$ справедливо равенство

$$K\left(x,\ t\right) = K\left(t,\ x\right).$$

Обозначим интегральный оператор Фредгольма через A:

$$A\,y = \int\limits_a^b K\left(x,\ t\right) y(t)\, dt \tag{53}$$

и вспомним определение 2. 12.
Определение. Числа λ, при которых однородное уравнение

$$y - \lambda A\,y = 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \lambda A\,y \tag{54}$$

имеет нетривиальное решение, называются **характеристическими числами оператора** A, а множество всех чисел вида $mu = \frac{1}{\lambda}$ называется

спектром оператора A[1]. Само же нетривиальное решение y называется **собственной функцией оператора** A**, соответствующей характеристическому числу** λ.

Так же как и главе I введём **скалярное произведение** на множестве функций $C\big[a,\ b\big]$:

$$\big(f,\ g\big) = \int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx. \tag{55}$$

II.5.2. Свойства спектра

Лемма 2. 3 (о симметричности)**.** *Оператор* A *является* ***симметричным****, т.е.* $\forall\ f(x),\ g(x)$ *– функций класса* $C\big[a,\ b\big]$ *справедливо равенство*

$$\big(Af,\ g\big) = \big(f,\ Ag\big). \tag{56}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение $\big(Af,\ g\big)$:

$$\big(Af,\ g\big) = \int\limits_a^b Af(x)\, g(x)\, dx = \int\limits_a^b g(x) \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\, f(t)\, dt\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b \int\limits_a^b \underbrace{K\big(x,\ t\big)}_{=K\left(t,\, x\right)} f(t)\, g(x)\, dt\, dx = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K\big(t,\ x\big)\, f(t)\, g(x)\, dt\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b \int\limits_a^b K\big(t,\ x\big)\, g(x)\, f(t)\, dt\, dx = \Big[x \leftrightarrows t\Big] = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\, f(x)\, g(t)\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_a^b f(x) \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\, g(t)\, dt\, dx = \big(f,\ Ag\big).$$

□

Как мы уже видели в главе I, **из симметричности оператора всегда следует действительность его собственных (характеристических) значений.**

---

[1]На самом деле данное определение – упрощённое. Вообще говоря, спектром оператора называют множество всех таких μ, что оператор $I - \mu A$ не имеет ограниченного обратного оператора, действующего на всём пространстве. Однако для рассматриваемых интегральных операторов Вольтерры и Фредгольма спектр совпадает со множеством собственных значений $mu = \frac{1}{\lambda}$.

Здесь мы докажем это для оператора Фредгольма с симметричным ядром.

Теорема 2. 11. *Все характеристические значения оператора Фредгольма с симметричным ядром действительны.*

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$ – характеристическое значение оператора Фредгольма A. Число $\lambda = 0$ можно не рассматривать, т.к. оно и так действительно. Тогда $\frac{1}{\lambda} = \alpha + i\beta$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, – характеристическое значение оператора Фредгольма A. Пусть $\psi(x) = u(x) + iv(x) \not\equiv 0$ – соответствующая собственная функция, т.е. решение однородного уравнения (52).

Тогда $A\big[u + iv\big] = \big(\alpha + i\beta\big)\big(u + iv\big)$, что равносильно системе

$$\begin{cases} Au = \alpha u - \beta v, \\ Av = \beta u + \alpha v. \end{cases} \tag{57}$$

$$\begin{array}{ccl} \big(Au,\ v\big) & = & \big(\alpha u - \beta v,\ v\big) = \alpha\big(u,\ v\big) - \beta\big(v,\ v\big) \\ \| & & \\ \big(u,\ Av\big) & = & \big(u,\ \beta u + \alpha v\big) = \beta\big(u,\ u\big) + \alpha\big(u,\ v\big), \end{array}$$

откуда $\beta \underbrace{\left(\big\|u\big\|^2 + \big\|v\big\|^2\right)}_{\neq 0} = 0$, что означает, что $\beta = 0$, а значит

$$\frac{1}{\lambda} = \alpha \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Приведём без доказательства[1] ещё один факт.

Теорема 2. 12. *Оператор Фредгольма с симметричным ядром (отличным от тождественного нуля) имеет по крайней мере одно характеристическое число, не равное нулю.*

II.5.3. Действительность и ортогональность собственных функций

Теорема 2. 13. *Без ограничения общности можно считать, что все собственные функции оператора Фредгольма с симметричным ядром действительнозначны.*

[1]Доказательство можно найти, например в [4], с 190–192.

Доказательство.
Пусть функция $f(x) = u(x) + iv(x)$ – комплекснозначная собственная функция оператора Фредгольма с симметричным ядром, соответствующая характеристическому значению λ. Тогда равенство

$$f = \lambda A f$$

можно переписать в виде

$$u(x) + iv(x) = \lambda \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\,\big(u(t) + iv(t)\big)\,dt =$$

$$= \lambda \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\,u(t)\,dt + i\lambda \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\,v(t)\,dt.$$

Поскольку $\lambda \in \mathbb{R}$ в силу теоремы 2.11, а $K\big(x,\ t\big) \in \mathbb{R}$, данное равенство распадается на два – для действительных частей и для мнимых частей. А именно,

$$\begin{cases} u(x) = \lambda \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\,u(t)\,dt, \\ v(x) = \lambda \int\limits_a^b K\big(x,\ t\big)\,v(t)\,dt. \end{cases}$$

Это означает, что функции $u(x)$ и $v(x)$ также являются собственными функциями, соответствующими одному и тому же характеристическому значению λ.

Таким образом, любую собственную функцию можно выразить через действительнозначные собственные функции, а следовательно всё сводится к изучению действительнозначных собственных функций. □

Теорема 2. 14. ***Пусть*** *$\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – собственные функции оператора Фредгольма с симметричным ядром, соответствующие разным характеристическим значениям $\lambda_1 \neq \lambda_2$, соответственно:*

$$\varphi = \lambda_1 A\,\varphi, \qquad \psi = \lambda_2 A\,\psi$$

Тогда *$\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ортогональны в смысле скалярного произведения (55):*

$$(\varphi,\ \psi) = \int\limits_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = 0. \tag{58}$$

Доказательство.
Напомним, что все линейно независимые собственные функции оператора Фредгольма с симметричным ядром могут быть выражены через действительнозначные собственные функции, и мы для удобства ими и ограничиваемся.

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Так как они различны, то хотя бы одно из этих чисел – не ноль. Пусть это будет $\lambda_1 \neq 0$.

$$\lambda_1 (A\varphi,\ \psi) = (\varphi,\ \psi) = \lambda_2 (\varphi,\ A\psi) = \\ = \Big[\text{в силу симметричности } A\Big] = \lambda_2 (A\varphi,\ \psi).$$

Отсюда

$$\underbrace{\big(\lambda_1 - \lambda_2\big)}_{\neq 0} (A\varphi,\ \psi) = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \big(A\varphi,\ \psi\big) = 0.$$

Отсюда,

$$\lambda_1\big(A\varphi,\ \psi\big) \equiv (\varphi,\ \psi) = 0.$$

$\square$

II.5.4. Связь с краевой задачей

Теорема 2. 15.
Пусть *$k(x) \geqslant k_0 > 0$ и $k(x) \in C^1\big[a,\ b\big]$, $q(x) \in C\big[a,\ b\big]$ – заданные функции, и однородная задача*

$$L[y] = \big(k(x)y'(x)\big)' - q(x)y = 0, \tag{59}$$
$$\Gamma_a[y] = 0, \tag{60}$$
$$\Gamma_b[y] = 0, \tag{61}$$

не имеет других решений, кроме тождественного нуля.
Тогда *задача Штурма–Лиувилля*

$$\big(k(x)y'(x)\big)' - q(x)y = \lambda y + h(x), \tag{62}$$
$$\Gamma_a[y] = 0, \tag*{(60)}$$
$$\Gamma_b[y] = 0 \tag*{(61)}$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b G(x,\ t)y(t)\,dt + f(x), \tag{63}$$

где $G(x, t)$ *– функция Грина задачи* (59) *–* (61)*, а*

$$f(x) = \int\limits_a^b G(x, t)h(t)\, dt,$$

т.е. $y(x)$ *является собственной функцией задачи* (62), (60), (61)*, соответствующей собственному значению* λ*, тогда и только тогда, когда* $y(x)$ *является собственной функцией уравнения* (63)*, соответствующей характеристическому значению* λ*.*

Доказательство.
По теореме Гильберта (теорема 1.13 главы I) существует функция Грина задачи (59) – (61), причём решение задачи (62), (60), (61), если правую часть

$$\tilde{h}(x) = \lambda y + h(x)$$

рассматривать как известную функцию, представляется в виде:

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x, t)\tilde{h}(t)\, dt, \tag{64}$$

откуда

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x, t)\big(\lambda y(t) + h(t)\big)\, dt = \lambda \int\limits_a^b G(x, t)y(t)\, dt + \underbrace{\int\limits_a^b G(x, t)h(t)\, dt}_{=f(x)}.$$

Итак, пара $\big(y(x),\ \lambda\big)$ есть собственная функция задачи (62), (60), (61) и соответствующее ему собственное значение тогда и только тогда, когда пара $\big(y(x),\ \lambda\big)$ есть собственная функция уравнения (63) и соответствующее ему характеристическое значение. □

Замечание 2.6. Напомним, что функция Грина всегда симметрична, поэтому получаемое интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b G(x, t)y(t)\, dt + f(x)$$

есть уравнение с симметричным ядром.

Литература

[1] *Антоневич А. Б., Радыно Я В.* **Функциональный анализ и интегральные уравнения**// М., изд-во «Университетское», 1984.

[2] *Васильева А. Б., Тихонов Н. А.* **Интегральные уравнения**// М., Физматлит, 2004.

[3] *Карташёв А. П., Рождественский Б. Л.* **Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления**// М., «Наука», 1986.

[4] *Краснов М. Л.* **Интеграальные уравнения. Введение в теорию**// М., «Наука», 1975.

[5] *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* **Теория обыкновенных дифференциальных уравнений**// М., Изд-во Иностранной литературы, 1958.

[6] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* **Функциональный анализ**// М., Физматлит, 2006.

[7] *Лизоркин П. И.* **Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа**// М., «Наука», 1981.

[8] *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* **Элементы функционального анализа**// М., «Наука», 1965.

[9] *Наймарк М. А.* **Линейные дифференциальные операторы**// М., «Наука», 1969.

[10] *Понтрягин Л. С.* **Обыкновенные дифференциальные уравнения**// М., «Наука», 1974 (1983).

[11] *Треногин В А.* **Функциональный анализ: Учебник** 3-е изд.// М.,Физматлит, 2002.

[12] *Эльсгольц Л. Э.* **Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление**// М., «Наука», 1969.