Глава III.

Теория устойчивости

§ – 1. Устойчивые решения ОДУ. Устойчивые многочлены

III.1.1. Устойчивые решения линейных ОДУ

Существенную роль в исследовании различных процессов, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями или системами, играет изучение т.н. «устойчивых решений».

Напомним общеупотребимые в теории ОДУ обозначения для векторов:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}, \qquad \underset{\downarrow}{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим решение $y = \varphi(t)$ уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \qquad t > t_0, \quad (a_0 \neq 0), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\underset{\downarrow}{y}(t_0) = \vec{\varphi}_0. \tag{2}$$

Наряду с задачей Коши (1), (2) рассмотрим **возмущённую задачу Коши**

$$\begin{cases} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \qquad x > x_0, \\ \underset{\downarrow}{y}(t_0) = \vec{y}_0, \end{cases} \tag{3}$$

задачу для того же уравнения, но с «возмущённым» начальным условием, т.е. начальным условием, отличающимся от (2).

Опр. 3.1. Решение $y = \varphi(t)$ называется **устойчивым по Ляпунову решением** уравнения (1), если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, \vec{y}_0, \ \text{ для которого } \left|\vec{y}_0 - \vec{\varphi}_0\right| < \delta, \tag{4}$$

решение $y_\delta(t)$ возмущённой задачи Коши (3) останется в ε-окрестности $y = \varphi(t)$ при всех $t > t_0$:

$$\forall\, t > t_0 \qquad \left|y_\delta(t) - \varphi(t)\right| < \varepsilon. \tag{5}$$

Лемма 3.1 (о сведении к устойчивости нулевого решения)**.**
Устойчивость решения $y = \varphi(t)$ уравнения (1) эквивалентна устойчивости нулевого решения $z(t) \equiv 0$ соответствующего однородного уравнения

$$a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} z\,' + a_n z = 0, \qquad t > t_0. \tag{6}$$

Доказательство.
Обозначим через $z_\delta(t) = y_\delta(t) - \varphi(t)$. Вычитая уравнения и начальные условия для этих функций, получаем, что $z_\delta(t)$ является решением задачи Коши:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y\,' + a_n y = 0, \qquad t > t_0, \\ y(t_0) = \vec{y}_0 - \vec{\varphi}_0 = \vec{z}_0. \\ \downarrow \end{array} \right. \tag{7}$$

Как легко видеть, определение устойчивости решения $y = \varphi(t)$ уравнения (1)

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, \vec{y}_0, \ \text{ для которого } \left|\underbrace{\vec{y}_0 - \vec{\varphi}_0}_{\vec{z}_0}\right| < \delta$$

$$\forall\, t > t_0 \qquad \left|\underbrace{y_\delta(t) - \varphi(t)}_{z_\delta}\right| < \varepsilon$$

в терминологии $z_\delta(t)$ переписывается в виде

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, \vec{z}_0, \ \text{ для которого } \left|z_0\right| < \delta$$

$$\forall\, t > t_0 \qquad \left|z_\delta(t)\right| < \varepsilon,$$

что и является определением устойчивости нулевого решения $z(t) \equiv 0$ однородного уравнения (6). □

Вывод: *при изучении вопросов устойчивости решений линейных ОДУ достаточно ограничиться исследованием устойчивости нулевых решений однородных уравнений.*

Опр. 3. 2. Устойчивое решение $y = \varphi(t)$ называется **асимптотически устойчивым решением** уравнения (1), если

$$\exists\, \delta > 0: \quad \forall\, \vec{y}_0, \ \text{ для которого } \left|\vec{y}_0 - \vec{\varphi}_0\right| < \delta, \tag{8}$$

решение $y_\delta(t)$ возмущённой задачи Коши (3) неограниченно приближается к $y = \varphi(t)$ при $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} \big(y_\delta(t) - \varphi(t)\big) = 0. \tag{9}$$

Замечание 3. 1. Вообще говоря, из асимптотической устойчивости не следует просто устойчивость решения.

Лемма 3. 2 (о сведении к асимптотической устойчивости нулевого решения)**.**
Асимптотическая устойчивость решения $y = \varphi(t)$ уравнения (1) эквивалентна асимптотической устойчивости нулевого решения $z(t) \equiv 0$ соответствующего однородного уравнения (6).

Доказательство.
Обозначим через $z_\delta(t) = y_\delta(t) - \varphi(t)$. Вычитая уравнения и начальные условия для этих функций, получаем, что $z_\delta(t)$ является решением задачи Коши (7).

Тогда условие асимптотической устойчивости решения $y = \varphi(t)$ уравнения (1)

$$\lim_{t\to+\infty} \big(y_\delta(t) - \varphi(t)\big) = 0$$

в терминологии $z_\delta(t)$ переписывается в виде

$$\lim_{t\to+\infty} z_\delta(t) = 0.$$

□

Пример 3. 1. *Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения*

$$y\,'(t) = ay(t), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, его общее решение
$$y(t) = ce^{at}.$$
Как легко заметить, при $t \to +\infty$ возможны три случая:
$$\left[\begin{array}{ll} a < 0 & y(t) \to 0, \\ a = 0 & \big|y(t)\big| \equiv \text{const}, \\ a > 0 & \big|y(t)\big| \to +\infty. \end{array}\right.$$
Сразу видно, что при $a < 0$ нулевое решение устойчиво, причём асимптотически; при $a = 0$ – просто устойчиво; а при $a > 0$ – неустойчиво вовсе.

Однако, совершенно аналогично этому примеру можно исследовать нулевое решение любого линейного ОДУ с постоянными коэффициентами, т.к. их общее решение явно выписывается в виде линейной комбинации экспонент (и, в случае кратных корней, экспонент, умноженных на многочлены от t).

Пример 3. 2. *Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения*
$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y\,' + a_n y = 0, \qquad t > t_0, \quad (a_0 \neq 0), \tag{10}$$
$a_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{0,\ n})$.

Запишем характеристическое уравнение:
$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \tag{11}$$
Пусть $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_m \in \mathbb{C}$ – его различные комплексные корни кратностей $k_1, \ \ldots, \ k_m$, соответственно.

Тогда общее решение уравнения (10) будет иметь вид линейной комбинации функций
$$\begin{array}{llll} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \ldots, & t^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 t}; \\ e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \ldots, & t^{k_2 - 1} e^{\lambda_1 t}; \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ e^{\lambda_m t}, & te^{\lambda_1 t}, & \ldots, & t^{k_m - 1} e^{\lambda_1 t}. \end{array}$$
Очевидно, что при нулевое решение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда
$$\forall\ j = \overline{1,\ n} \qquad \operatorname{Re} \lambda_j < 0,$$
и неустойчиво, если
$$\exists\ j_0 : \qquad \operatorname{Re} \lambda_{j_0} > 0.$$

Итак: вопрос об устойчивости нулевого решения линейного ОДУ с постоянными коэффициентами свёлся к исследованию вопроса о том, располагаются ли все корни характеристического уравнения в левой полуплоскости плоскости $\mathbb{C}$, или есть корни в правой полуплоскости.

Заметим также, что случай, когда все $\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant 0$ и есть хотя бы один корень с $\operatorname{Re}\lambda = 0$, уже не так очевиден. Хотя для данного модельного случая и тут всё ясно: если все корни с $\operatorname{Re}\lambda = 0$ не кратные, то нулевое решение устойчиво (но не асимптотически), а если хотя бы один из них имеет кратность больше 1, то неустойчиво.

Поэтому следующий пункт посвящён исследованию устойчивости многочленов.

III.1.2. Устойчивые многочлены

Опр. 3. 3. Многочлен

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n, \qquad a_j \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

называется **устойчивым**, если все его корни лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \qquad j = \overline{1,\ n}.$$

Важная договорённость: всюду далее будем полагать

$$\boxed{a_0 > 0.}$$

Устойчивость многочленов 1-й и 2-й степеней

Исследование устойчивости для многочленов 1-й и 2-й степеней столь же элементарно, сколь полезно.

Многочлен 1-й степени.
Рассмотрим многочлен с действительными коэффициентами 1-й степени

$$p_1(\lambda) = a_0\lambda + a_1, \qquad a_0 > 0. \tag{13}$$

Его корень равен

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Очевидно, он будет лежать в левой полуплоскости $\mathbb{C}$ (на самом деле на отрицательной полуоси оси Ox) тогда и только тогда, когда (при $a_0 > 0$)

$$\lambda_1 < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1 > 0.$$

Итак, многочлен 1-й степени **устойчив** тогда и только тогда, когда **все его коэффициенты положительны**:

$$a_0 > 0, \qquad a_1 > 0.$$

Многочлен 2-й степени.

Рассмотрим многочлен с действительными коэффициентами 2-й степени

$$p_1(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2, \qquad a_0 > 0. \tag{14}$$

Его корни равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}.$$

При $a_1^2 - 4a_0a_2 \leqslant 0$ $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \frac{-a_1}{2a_0}$,

при $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$ $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$.

Поэтому, чтобы $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}$ было меньше нуля, нужно (с учётом $a_0 > 0$) выполнение

$$\begin{cases} a_1 > 0, & \text{при} \quad a_1^2 - 4a_0a_2 \leqslant 0, \\ -a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} < 0, & \text{при} \quad a_1^2 - 4a_0a_2 > 0. \end{cases}$$

Первый случай приводит к требованиям:

$$a_1 > 0, \qquad a_0a_2 \geqslant \frac{a_1^2}{4} > 0, \qquad \Longrightarrow \qquad a_2 > 0.$$

Для второго случая получаем такие неравенства:

$$\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} < a_1, \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 > 0, \quad a_1^2 - 4a_0a_2 < a_1^2, \qquad \Longrightarrow \qquad a_2 > 0.$$

Итак, в любом случае, многочлен 2-й степени **устойчив** тогда и только тогда, когда **все его коэффициенты положительны**:

$$a_0 > 0, \qquad a_1 > 0, \qquad a_2 > 0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. 1.

Многочлен 1-й и 2-й степени устойчив тогда и только тогда, когда (при $a_0 > 0$) все его коэффициенты положительны.

Необходимое условие устойчивости многочлена n-й степени. Теорема Стодолы

Теорема 3. 2 (Стодолы).
Пусть *многочлен n-й степени с действительными коэффициентами устойчив,* $a_0 > 0$.
Тогда *все его коэффициенты положительны.*

Доказательство.
Разложим многочлен

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \qquad (12)$$

на множители – многочлены степеней 1 и 2 (это всегда можно сделать):

$$p(\lambda) = a_0\big(\lambda + b_1\big)\ldots\big(\lambda + b_m\big)\big(\lambda^2 + c_1\lambda + d_1\big)\ldots\big(\lambda^2 + c_s\lambda + d_s\big),$$

где $m + 2s = n$, а дискриминанты квадратных трёхчленов отрицательны.

Поскольку множество корней $p(\lambda)$ совпадает со множеством корней всех входящих в его разложение многочленов первой-второй степеней, то **устойчивость** $p(\lambda)$ **эквивалентна устойчивости всех многочленов его разложения**.

Учитывая, что коэффициенты при старших степенях λ в каждой скобке равны $1 > 0$, то применив теорему 3. 1, получаем, что из устойчивости $p(\lambda)$ следует положительность всех коэффициентов каждой скобки, откуда сразу следует положительность всех коэффициентов $p(\lambda)$. □

Замечание 3. 2. Обратное не верно, поскольку из положительности всех коэффициентов $p(\lambda)$ не следует положительность всех коэффициентов каждой скобки его разложения.

Например,

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 10 = \big(\lambda + 2\big)\big(\lambda^2 - \lambda + 5\big),$$

и корни у этого многочлена не все лежат в левой полуплоскости:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{19}}{2}, \qquad \operatorname{Re}\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} > 0.$$

Критерий устойчивости многочлена 3-й степени. Теорема Вышнеградского

Лемма 3. 3.

Многочлен 3-й степени с действительными коэффициентами

$$q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c, \qquad a,\ b,\ c > 0$$

имеет чисто мнимый корень тогда и только тогда, когда $ab = c$.

Доказательство.

Во-первых, заметим, что корня $\lambda = 0$ у нашего многочлена быть не может, т.к. в этом случае $c = 0$, что противоречит условию $a,\ b,\ c > 0$.

Поэтому чисто мнимые корни могут быть у него только парой $\lambda_{1,\,2} = \pm i\mu$, $\mu > 0$.

Необходимость.

Пусть $\lambda_{1,\,2} = \pm i\mu$ $(\mu > 0)$ – пара корней $q(\lambda)$. Тогда его можно представить в виде

$$q(\lambda) = (\lambda^2 + \mu^2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 + \underbrace{(-\lambda_3)}_{a}\lambda^2 + \underbrace{\mu^2}_{b}\lambda + \underbrace{\mu^2(-\lambda_3)}_{c},$$

откуда $ab = c$.

Достаточность.

Пусть $ab = c$. Тогда $q(\lambda)$ можно разложить на множители:

$$q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + ab = (\lambda^2 + b)(\lambda + a).$$

Учитывая, что $b > 0$ и обозначая $\mu = \sqrt{b} > 0$, получаем, что $\lambda_{1,\,2} = \pm i\mu$ – пара корней $q(\lambda)$. □

Лемма 3. 4.

Если многочлен 3-й степени с действительными коэффициентами

$$q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c, \qquad a,\ b,\ c > 0$$

при непрерывном изменении коэффициентов изменил устойчивость на неустойчивость (или наоборот), то его коэффициенты прошли через соотношение $ab = c$.

Доказательство.

В первую очередь заметим, что *корни многочлена – непрерывные функции* *от его коэффициентов.* В силу этого, при непрерывном изменении коэффициентов a, b и c корни ползут по непрерывным траекториям на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Поскольку изменение устойчивости на неустойчивость (или наоборот) означает, что хотя бы один корень перешёл из левой полуплоскости в правую (или наоборот), то его траектория обязана при этом пересечь мнимую ось. Таким образом, в какой-то момент многочлен $q(\lambda)$ имел чисто мнимый корень. По лемме 3. 3 это означает, что его коэффициенты в этот момент удовлетворяли соотношению $ab = c$. □

Теорема 3. 3 (Вышнеградского)**.**
Многочлен 3-й степени с действительными коэффициентами

$$p(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3, \qquad a_0 > 0$$

устойчив тогда и только тогда, когда

1) *все его коэффициенты положительны;*

2) *справедливо неравенство*

$$a_1 a_2 > a_0 a_3. \tag{15}$$

Доказательство.

В первую очередь заметим, что условие 1) является необходимым для устойчивости $p(\lambda)$, поэтому имеет смысл рассматривать только случай, когда оно выполняется.

Доказательство проведём для многочлена вида

$$q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

поскольку делением на a_0 мы всегда можем привести $p(\lambda)$ к такому виду.

Обратим внимание, что при $a = \frac{a_1}{a_0}$, $b = \frac{a_2}{a_0}$, $c = \frac{a_3}{a_0}$ неравенства (15) и $ab > c$ эквивалентны, т.е. либо одновременно выполнены, либо одновременно не выполнены. В самом деле,

$$ab = \frac{a_1 a_2}{a_0^2}, \qquad c = \frac{a_3}{a_0},$$

откуда при $a_0 \neq 0$ получаем

$$ab > c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a_1 a_2}{a_0^2} > \frac{a_3}{a_0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1 a_2 > a_0 a_3.$$

Необходимость неравенства $ab > c$.

Неравенство $ab > c$ докажем от противного: пусть оно не выполнено, но многочлен $q(\lambda)$ устойчив. Тогда либо $ab = c$, либо $ab < c$.

Представим многочлен $q(\lambda)$ в виде

$$q(\lambda) = \big(\lambda + a\big)\big(\lambda^2 + b\big) + \big(c - ab\big). \tag{16}$$

Случай 1. $ab = c$.

Тогда (16) примет вид

$$q(\lambda) = \big(\lambda + a\big)\big(\lambda^2 + b\big),$$

а у такого многочлена есть корни $\lambda_{1,2} = \pm ib$, и по определению многочлен $q(\lambda)$ неустойчив.

Итак: из равенства $ab = c$ следует неустойчивость $q(\lambda)$.

Случай 2. $ab < c$.

Начнём непрерывно изменять коэффициенты a и b, сохраняя неравенство $ab < c$, так, чтобы a и b стремились к нулю. При этом, в силу леммы 3.4, поскольку неравенство $ab < c$ не нарушается, то ни один из корней многочлена $q(\lambda)$ не пересечёт ось $\operatorname{Im} z$, и свойство быть устойчивым или неустойчивым у $q(\lambda)$ не изменится.

Когда $a = b = 0$, имеем $q(\lambda) = \lambda^3 + c$, и

- либо $c = 0$, а это противоречит условию $c > ab = 0$.
- либо у $q(\lambda)$ есть пара комплексно-сопряжённых корней

  $$\lambda_{1,2} = \sqrt[3]{c}\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

  действительная часть которых $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt[3]{c}}{2} > 0$. Поэтому полученный при $a = b = 0$ многочлен $q(\lambda)$ неустойчив. А в силу непрерывной зависимости корней от коэффициентов, при достаточно малых положительных значениях a и b знак $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}$ сохранится, а вместе с ним и неустойчивость $q(\lambda)$.

  Что же будет при больших положительных значениях a и b? По лемме 3.4 многочлен не меняет свою устойчивость/неустойчивость при непрерывном изменении коэффициентов a, b и c, если коэффициенты не проходят через равенство $ab = c$, например, если сохраняется неравенство $ab < c$. Следовательно, так как любые три значения a,

b и c, для которых выполняется $ab < c$, можно соединить непрерывными траекториями с любыми другими тремя значениями a, b и c, для которых выполняется $ab < c$, так, чтобы при прохождении траекторий сохранялось это неравенство, то из неустойчивости $q(\lambda)$ с малыми a и b при $ab < c$ следует неустойчивость $q(\lambda)$ с любыми a и b при $ab < c$.

(Заметим, что аналогичные действия при $ab > c$ не пройдут, ибо при обращении ab в нуль коэффициент c обязан стать отрицательным, что противоречит условию теоремы).

Итак: из неравенства $ab < c$ следует неустойчивость $q(\lambda)$.

Достаточность неравенства $ab > c$.

По лемме 3.4 многочлен не меняет свою устойчивость/неустойчивость при непрерывном изменении коэффициентов a, b и c, если коэффициенты не проходят через равенство $ab = c$, например, если сохраняется неравенство $ab > c$. Поэтому устремим теперь c к нулю справа так, чтобы неравенство $ab > c$ сохранялось.

В пределе получим многочлен

$$q(\lambda) = \lambda\bigl(\lambda^2 + a\lambda + b\bigr),$$

имеющий корни

$$\lambda_{1,\,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \qquad \lambda_3 = 0.$$

Легко заметить, что $\operatorname{Re}\lambda_{2,\,3} < 0$, независимо от знака подкоренного выражения (дискриминанта). В самом деле, если

1) $D = a^2 - 4b \leqslant 0$, то $\operatorname{Re}\lambda_{2,\,3} = \dfrac{-a}{2} < 0$;

2) $D = a^2 - 4b > 0$, то поскольку $a > \sqrt{a^2 - 4b}$, получаем, что оба корня отрицательны: $\lambda_{1,\,2} < 0$.

При небольшом изменении c все три корня изменятся слабо, в частности, действительные части $\operatorname{Re}\lambda_{1,\,2}$ останутся отрицательны, а мнимые будут малы. Выясним знак действительной части третьего корня. Учитывая, что

$$-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = c > 0 \qquad (\text{т.к. нас интересует только } c > 0),$$

получаем, что
$$\lambda_3 = -\frac{c}{\lambda_1\lambda_2} = -\frac{c}{\left|\lambda_1\lambda_2\right|^2}\,\overline{\lambda_1\lambda_2}.$$
Таким образом,
$$\operatorname{Re}\lambda_3 = -\operatorname{Re}\frac{c}{\left|\lambda_1\lambda_2\right|^2}\,\overline{\lambda_1\lambda_2} = -\frac{c}{\left|\lambda_1\lambda_2\right|^2}\operatorname{Re}\lambda_1\lambda_2. \tag{17}$$
Опять возможны 2 случая:

- $a^2-4b>0$, тогда
$$\lambda_1\lambda_2 \approx \frac{1}{4}\left(-a+\sqrt{a^2-4b}\right)\left(-a-\sqrt{a^2-4b}\right) = \\ = \frac{1}{4}\left(a^2-\left(a^2-4b\right)\right) = b > 0.$$

- $a^2-4b \leqslant 0$, тогда $\lambda_{1,2} \approx \frac{-a}{2} \pm i\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} = \alpha \pm i\beta$ Тогда
$$\operatorname{Re}\lambda_1\lambda_2 = \operatorname{Re}\big(\alpha+i\beta\big)\big(\alpha-i\beta\big) = \alpha^2+\beta^2 \approx \frac{1}{4}\left(a^2+\left(4b-a^2\right)\right) = b > 0.$$

Итак, в обоих случаях
$$\operatorname{Re}\lambda_1\lambda_2 \approx b > 0.$$
Отсюда и из (17) получаем:
$$\operatorname{Re}\lambda_3 = -\frac{c}{\left|\lambda_1\lambda_2\right|^2}\operatorname{Re}\lambda_1\lambda_2 < 0.$$

Итак: при небольших положительных значениях c все три корня имеют отрицательную действительную часть, а значит, многочлен $q(\lambda)$ устойчив.

Что же будет при больших положительных значениях c? По лемме 3.4 многочлен не меняет свою устойчивость/неустойчивость при непрерывном изменении коэффициентов a, b и c, если коэффициенты не проходят через равенство $ab=c$, например, если сохраняется неравенство $ab>c$. Следовательно, так как любые три значения a, b и c, для которых выполняется $ab>c$, можно соединить непрерывными траекториями с любыми другими тремя значениями a, b и c, для которых выполняется $ab>c$, так, чтобы при прохождении траекторий сохранялось это неравенство, то из устойчивости $q(\lambda)$ с малыми c при $ab>c$ следует устойчивость $q(\lambda)$ с любыми c при $ab>c$. $\square$

Замечание 3. 3. Обратим внимание, что из теоремы Вышнеградского и леммы 3. 3 следует полный ответ на вопрос об устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения

$$a_0 y'''(t) + a_1 y''(t) + a_2 y'(t) + a_3 y(t) = 0, \qquad a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3 > 0:$$

- при $a_1 a_2 > a_0 a_3$ нулевое решение асимптотически устойчиво;
- при $a_1 a_2 = a_0 a_3$ нулевое решение устойчиво, но не асимптотически;
- при $a_1 a_2 < a_0 a_3$ нулевое решение не устойчиво.

Устойчивость многочлена n-й степени

Приведём без доказательств два критерия устойчивости многочлена произвольной степени.

Рассмотрим многочлен

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n, \qquad a_0 > 0. \tag{18}$$

Опр. 3. 4. Матрицей Гурвица для многочлена (18) называется матрица

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \tag{19}$$

если считать, что $a_j = 0$ при $j > n$.

Замечание 3. 4. В некоторых источниках матрицей Гурвица называют транспонированную матрицу (19), например, в [11], [12]. На содержании нижеследующих теорем это никак не сказывается.

Опр. 3. 5. Главным минором M_j матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{20}$$

называется определитель матрицы, стоящей на пересечении первых j строк матрицы A с первыми j её столбцами:

$$M_1 = a_{11}, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \ldots, \qquad M_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jj} \end{vmatrix}.$$

Теорема 3. 4 (Критерий Рауса–Гурвица)**.**
Многочлен n-й степени с действительными коэффициентами

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n, \qquad a_0 > 0$$

устойчив тогда и только тогда, когда

1) *все его коэффициенты положительны:* $\forall\ j = \overline{1,\ n} \quad a_j > 0$;

2) *все главные миноры его матрицы Гурвица положительны:* $\forall\ j = \overline{1,\ n} \quad M_j > 0$.

Замечание 3. 5. Критерий Рауса–Гурвица может быть доказан множеством различных способов. Относительно элементарное доказательство его можно найти в [7], Гл. V, § 2, п. 75, с. 427 – 431.

Существует и более сильный критерий.

Теорема 3. 5 (Критерий Льенара–Шипара)**.**
Многочлен n-й степени с действительными коэффициентами

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n, \qquad a_0 > 0$$

устойчив тогда и только тогда, когда

1) *все его коэффициенты положительны:* $\forall\ j = \overline{1,\ n} \quad a_j > 0$;

2) *положительны главные миноры его матрицы Гурвица с номерами* $j = n-1,\ \ j = n-3,\ \ j = n-5,\ \ \ldots$.

Замечание 3. 6. Эквивалентность требований критерия Льенара–Шипара требованиям критерия Рауса–Гурвица можно легко проиллюстрировать на примере многочлена степени 3.

В самом деле, матрицей Гурвица для

$$p(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

является матрица

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

а её главные миноры

$$M_1 = a_1, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}.$$

По критерию Льенара–Шипара достаточно, чтобы

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3 > 0, \qquad M_2 > 0.$$

Покажем, что из неравенства $M_2 > 0$ следует $M_3 > 0$. Разложим $M_3 > 0$ по последней строке:

$$M_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 M_2.$$

Отсюда если $M_2 > 0$, то при выполнении необходимого условия устойчивости $\big(a_j > 0\big)$ следует, что $M_3 > 0$.

Аналогично получается, что при произвольном $n > 2$ и при выполнении необходимого условия устойчивости (теорема Стодолы 3.2) из $M_{n-1} > 0$ следует $M_n = a_n M_{n-1} > 0$.

§ – 2. Устойчивость решений систем ОДУ

Рассмотрим систему ОДУ

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\big(\vec{x},\, t\big). \tag{21}$$

Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ – решение этой системы, и при $t = t_0$ оно удовлетворяет начальным условиям

$$\vec{x}(t_0) = \vec{\varphi}_0. \tag{22}$$

Наряду с задачей Коши (21), (22) рассмотрим *возмущённую задачу Коши:*

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{f}\big(\vec{x},\, t\big) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \end{cases} \tag{23}$$

Опр. 3.6. Решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ задачи Коши (21), (22) называется **устойчивым по Ляпунову**, если при малых возмущениях начальных условий решение задачи Коши меняется мало:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, \vec{x}_0 : \quad \big|\vec{x}_0 - \vec{\varphi}_0\big| < \delta$$

для решения $\vec{x}(t)$ возмущённой задачи Коши (23) справедлива оценка:

$$\forall\, t > t_0 \qquad \left|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\right| < \varepsilon.$$

Опр. 3. 7. Решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ задачи Коши (21), (22) называется **асимптотически устойчивым**, если при малых возмущениях начальных условий решение задачи Коши меняется мало и при больших t неограниченно приближается к решению невозмущённой задачи:

1) решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ задачи Коши (21), (22) является устойчивым по Ляпунову;

2)
$$\exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, \vec{x}_0 : \ \left|x_0 - \vec{\varphi}_0\right| < \delta$$
решение $\vec{x}(t)$ возмущённой задачи Коши (23) приближается к $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$:
$$\exists \lim_{t \to +\infty} \left|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\right| = 0.$$

Пример 3. 3.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x; \\ \dot{y} = -3y. \end{cases}$$

Общим решением данной системы является решение $x = c_1 e^{-t}$, $y = c_2 e^{-3t}$. Изучим вопрос об устойчивости нулевого решения $\vec{\varphi}(t) = \vec{0}$. При $t = 0$ $\vec{\varphi}(t)$ удовлетворяет начальному условию $\vec{\varphi}(0) = \vec{0}$. Рассмотрим возмущённую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x; & \dot{y} = -3y; \\ x(0) = x_0 & y(0) = y_0 \end{cases}.$$

Тогда константы в общем решении получатся равны

$$c_1 = x_0, \qquad c_2 = y_0.$$

А само решение возмущённой задачу Коши будет иметь вид

$$x = x_0 e^{-t}, \qquad y = y_0 e^{-3t}.$$

Легко заметить, что с ростом t модули $|x(t)|$ и $|y(t)|$ только уменьшаются, поэтому
если $x_0^2 + y_0^2 < \delta^2$, то $\forall t > 0 \quad x(t)^2 + y(t)^2 < \delta^2$.

Стало быть мы можем взять в определении устойчивости $\delta = \varepsilon$ и из $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \delta$ будет следовать $\forall t > 0 \quad \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} < \varepsilon$. Таким образом, нулевое решение (невозмущённой задачи Коши) устойчиво.

Кроме того, очевидно,

$$\exists \lim_{t\to+\infty} \left| \sqrt{x^2(t)+y^2(t)} - 0 \right| = 0.$$

Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво.

III.2.1. Положения равновесия системы ОДУ

Опр. 3. 8. Решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ задачи Коши (21), (22) называется **положением равновесия**, если

$$\forall\, t > t_0 \qquad \vec{f}\big(\vec{\varphi}(t),\ t\big) = 0.$$

Из определения видно, что если решение в какой-то момент времени совпало с положением равновесия, то уйти из него оно уже не сможет: $\dot{\vec{x}} = 0 \implies \vec{x} \equiv \overrightarrow{\mathrm{const}}$. Поэтому определение 3. 8 можно переписать в виде

Опр. 3. 9. Решение $\vec{x} = \vec{\varphi}$ задачи Коши (21), (22) называется **положением равновесия**, если

$$\vec{\varphi} \equiv \overrightarrow{\mathrm{const}}.$$

Пример 3. 4. *Найти положения равновесия системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - x^2; \\ \dot{y} = 3x - y - x^2. \end{cases}$$

Положения равновесия – это решения, равные константам, поэтому будем искать такие

$$x = c_1, \qquad y = c_2,$$

чтобы при подстановке их в заданную систему мы получали верные равенства:

$$\begin{cases} 0 = \dot{c}_1 = -c_1 + c_2 - c_1^2; \\ 0 = \dot{c}_2 = 3c_1 - c_2 - c_1^2. \end{cases}$$

Сложим эти равенства, чтобы сократились c_2, и получим

$$2c_1 - 2c_1^2 = 0, \qquad c_1 = 0, \quad \text{или} \quad c_1 = 1.$$

Подставляя найденные значения c_1 в уравнение $0 = -c_1 + c_2 - c_1^2$, найдём соответствующие значения c_2:

$$c_2 = 0, \quad \text{или} \quad c_1 = 2.$$

Таким образом получаем, что данная система имеет два положения равновесия:

$$\big(0,\ 0\big) \qquad \text{и} \qquad \big(1,\ 2\big).$$

Лемма 3. 5 (о сведении к устойчивости нулевого решения)**.**
Устойчивость/асимптотическая устойчивость положения равновесия $\vec{x} = \vec{\varphi} \equiv \overrightarrow{\mathrm{const}}$ *системы* (21) *эквивалентна устойчивости/асимптотической устойчивости нулевого решения* $\vec{z} \equiv \vec{0}$ *системы*

$$\dot{\vec{z}} = \vec{f}\big(\vec{z} + \vec{\varphi},\ t\big). \tag{24}$$

Доказательство.
Проведём в системе (21) замену $\vec{z} = \vec{x} - \vec{\varphi}$. Тогда $\vec{x} = \vec{z} + \vec{\varphi}$, и система (21)

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\big(\vec{x},\ t\big). \tag{21}$$

переписывается в виде (24). При этом положение равновесия $\vec{x} = \vec{\varphi}$ переходит в положение равновесия новой системы $\vec{z} \equiv \vec{0}$. □

Вывод: *при изучении вопросов устойчивости положений равновесия систем ОДУ достаточно ограничиться исследованием устойчивости нулевого решения.*

III.2.2. Устойчивость нулевого решения линейной системы ОДУ

В этом пункте рассмотрим устойчивость нулевого решения однородной линейной системы

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \tag{25}$$

где A – матрица $n \times n$ с постоянными элементами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Аналогично случаю одного линейного уравнения n-го порядка, исследуем вид общего решения уравнения (25). Для этого найдём корни характеристического уравнения

$$\det\big(A - \lambda E\big) = 0, \tag{26}$$

где E – единичная матрица.

Пусть $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_m$ – все различные корни характеристического уравнения (26). Тогда общее решение (25) будет линейной комбинацией выражений вида

$$\vec{h}_j t^p e^{\lambda_k t},$$

где p не превосходит кратности соответствующего собственного значения λ_k, а $\vec{h}_j$, $\left(j = \overline{1, s}\right)$ – некоторые векторы.

Очевидно, что при нулевое решение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$\forall\, j = \overline{1,\ n} \qquad \operatorname{Re}\lambda_j < 0,$$

и неустойчиво, если

$$\exists\, j_0 : \qquad \operatorname{Re}\lambda_{j_0} > 0.$$

Итак: вопрос об устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами свёлся к исследованию вопроса о том, располагаются ли все корни характеристического уравнения в левой полуплоскости плоскости $\mathbb{C}$, или есть корни в правой полуплоскости.

Заметим также, что случай, когда все $\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant 0$ и есть хотя бы один корень с $\operatorname{Re}\lambda = 0$, уже не так очевиден. И его исследование, хотя и не требует знаний за рамками курса ОДУ, является довольно громоздким. Предоставляем этот вопрос любознательному читателю.

III.2.3. Устойчивость по первому приближению

Теперь рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x},\, t\right) \tag{21}$$

и предположим, что $\vec{x} = \vec{0}$ является её положением равновесия. Из этого предположения сразу следует, что $\vec{f}\left(\vec{0},\, t\right) \equiv \vec{0}$. Поэтому если каждая координата вектора $\vec{f}$ непрерывно дифференцируема в окрестности $\vec{x} = \vec{0}$, то её можно разложить по формуле Тейлора до первого порядка с остаточным членом в форме Пеано:

$$f_i\left(\vec{x},\, t\right) = \underbrace{f_i\left(\vec{0},\, t\right)}_{=0} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(\vec{0},\, t\right)}_{=a_{ij}} x_j + \bar{o}\left|\vec{x}\right|, \qquad \left|\vec{x}\right| \to 0.$$

Тогда

$$f\left(\vec{x},\, t\right) = A\vec{x} + \underbrace{\vec{\Psi}\left(\vec{x},\, t\right)}_{=\vec{\bar{o}}\left|\vec{x}\right|},$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица с постоянными элементами $a_{ij} = \mathrm{const}$. В этих обозначениях система (21) перепишется в виде

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{\Psi}(\vec{x}, t), \qquad \vec{\Psi}(\vec{x}, t) = \bar{\bar{\vec{o}}}|\vec{x}|, \quad |\vec{x}| \to 0. \tag{27}$$

Теорема 3. 6 (об устойчивости по первому приближению).
Пусть $\vec{f}(\vec{x}, t) \in C^1$ *в некоторой окрестности точки* $\vec{x} = \vec{0}$ $\forall\, t \geqslant t_0$ *представима в виде*

$$f(\vec{x}, t) = A\vec{x} + \underbrace{\vec{\Psi}(\vec{x}, t)}_{=\bar{\bar{\vec{o}}}|\vec{x}|}$$

и $\left|\vec{\Psi}(\vec{x}, t)\right| \leqslant \gamma(x) \cdot |x|$, *где* $\gamma(x) \to 0$ *при* $|x| \to 0$.
Тогда справедливы следующие утверждения

1) *Если для всех собственных чисел* λ_i *матрицы* A $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$, *то нулевое решение системы* (27) *асимптотически устойчиво.*

2) *Если* $\exists$ *собственное число* λ_{i_0} *матрицы* A, *для которого* $\mathrm{Re}\,\lambda_{i_0} > 0$, *то нулевое решение системы* (27) *неустойчиво.*

3) *Наконец, если* $\max\limits_i \{\mathrm{Re}\,\lambda_i\} = 0$, *то устойчивость или неустойчивость нулевого решения системы* (27) *зависит не только от матрицы* A, *но и от функции* $\vec{\Psi}(\vec{x}, t)$, *и информации о собственных числах для определенного ответа не достаточно.*

Пример 3. 5. *Исследовать на устойчивость нулевое решение системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{ax-y} - \cos\left(x + y^2\right) \\ \dot{y} = -\sqrt{9 + 18x} + 3e^y. \end{cases}$$

Разложим правую часть каждого уравнения системы по формуле Тейлора:

$$e^{ax-y} - \cos\left(x + y^2\right) = 1 + ax - y - 1 + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \qquad \sqrt{x^2 + y^2} \to 0,$$

$$-\sqrt{9 + 18x} + 3e^y = -3(1+x) + 3(1+y) + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \qquad \sqrt{x^2 + y^2} \to 0.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \\ \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \end{pmatrix}, \qquad \sqrt{x^2+y^2} \;\to\; 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & -1 \\ -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+3)\lambda + 3a - 3 = 0.$$

Его корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+3 \pm \sqrt{(a+3)^2 - 12a + 12}}{2} = \frac{a+3 \pm \sqrt{a^2 - 6a + 12}}{2}.$$

Поскольку дискриминант подкоренного выражения отрицателен при всех $a \in \mathbb{R}$:

$$D = 6^2 - 4 \cdot 12 = -12 < 0,$$

то

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,\,2} = \frac{a+3}{2}.$$

Таким образом,

1) $a < -3$ $\operatorname{Re} \lambda_{1,\,2} < 0$ и нулевое решение системы асимптотически устойчиво;

2) $a > -3$ $\operatorname{Re} \lambda_{1,\,2} > 0$ и нулевое решение системы неустойчиво;

3) $a = -3$ $\operatorname{Re} \lambda_{1,\,2} = 0$ и устойчивость нулевого решения по первому приближению исследовать невозможно.

Литература

[1] *Антоневич А. Б., Радыно Я В.* **Функциональный анализ и интегральные уравнения**// М., изд-во «Университетское», 1984.

[2] *Васильева А. Б., Тихонов Н. А.* **Интегральные уравнения**// М., Физматлит, 2004.

[3] *Карташёв А. П., Рождественский Б. Л.* **Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления**// М., «Наука», 1986.

[4] *Краснов М. Л.* **Интеграальные уравнения. Введение в теорию**// М., «Наука», 1975.

[5] *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* **Теория обыкновенных дифференциальных уравнений**// М., Изд-во Иностранной литературы, 1958.

[6] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* **Функциональный анализ**// М., Физматлит, 2006.

[7] *Лаврентьев М. А., Шабат Б.В.* **Методы теории функций комплексного переменного**// М., ФизМатЛит, 1958.

[8] *Лизоркин П. И.* **Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа**// М., «Наука», 1981.

[9] *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* **Элементы функционального анализа**// М., «Наука», 1965.

[10] *Наймарк М. А.* **Линейные дифференциальные операторы**// М., «Наука», 1969.

[11] *Понтрягин Л. С.* **Обыкновенные дифференциальные уравнения**// М., «Наука», 1974 (1983).

[12] *Постников М. М.* **Устойчивые многочлены**// М., «Наука», 1981 .

[13] *Треногин В А.* **Функциональный анализ: Учебник** 3-е изд.// М.,Физматлит, 2002.

[14] *Эльсгольц Л. Э.* **Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление**// М., «Наука», 1969.