Глава IV.

Первые интегралы систем ОДУ

§ – 1. Первые интегралы автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

В этом параграфе будем рассматривать автономные системы вида

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\,(\vec{x})\,, \qquad \vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$\vec{f}\,(\vec{x}) = \big(f_1\,(\vec{x})\,,\ \ldots,\ f_n\,(\vec{x})\,\big) \in C^{\,1}(D)$.

Опр. 4. 1. Первым интегралом системы (1) будем называть функцию $u\,(\vec{x}) \in C^{\,1}(D)$ такую, что:

1) $u\,(\vec{x}) \not\equiv \mathrm{const}$ ни в какой подобласти области D.

2) Для любого решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t) \equiv \big(\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)\big)$ системы (1) $u\,(\vec{\varphi}(t)) \equiv \mathrm{const}$.

Замечание 4. 1. Иногда первым интегралом называют не функцию $u\,(\vec{x})$, а соотношение $u\,(\vec{x}) = c$; это бывает удобно при практическом решении систем.

Пример 4. 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1; \\ \dot{x}_2 = 2x_2. \end{cases}$$

Тогда решение этой системы представляется в виде $x_1 = c_1 e^t$, $x_2 = c_2 e^{2t}$.

Покажем, что функция $u\big(x_1,\ x_2\big) = \frac{x_1^2}{x_2}$ является первым интегралом рассматриваемой системы, например, в области $\big\{\big(x_1,\ x_2\big):\quad x_1 > 0,\ \ x_2 > 0\big\}$.

Действительно, $u\big(x_1,\ x_2\big) \not\equiv \mathrm{const}$ ни в какой подобласти, но если взять решение системы $x_1 = c_1 e^t$, $x_2 = c_2 e^{2t}$, то $u\big(x_1(t),\ x_2(t)\big) = \frac{c_1^2}{c_2} \equiv \mathrm{const}$.

В дальнейшем нам понадобится понятие (функциональной) зависимости функций, которое вводится в курсе математического анализа. Напомним его.

Опр. 4.2. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим функции $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x}) \in C^1(D)$. Пусть j – один из номеров $1, \ldots, k$.

Скажем, что **функция** $u_j(\vec{x})$ **зависима от функций** $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{j-1}(\vec{x}), u_{j+1}(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$, если $\exists$ функция $\varphi\big(y_1, \ldots, y_{k-1}\big)$ класса C^1 такая, что

$$u_j(\vec{x}) = \varphi\big(u_1(\vec{x}), \ldots, u_{j-1}(\vec{x}), u_{j+1}(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})\big), \qquad \forall\, x \in D.$$

Система функций $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ называется в этом случае **зависимой на множестве** D.

В противном случае эта система называется **независимой**.

В курсе математического анализа доказываются следующие утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Утверждение 4.1. *Пусть* $2 \leqslant k \leqslant n$.

Система функций $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ *является зависимой в* D, *тогда и только тогда, когда ранг матрицы Якоби*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_k(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_k(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

меньше k *в каждой точке* $\vec{x} \in D$.

Утверждение 4.2. *Пусть* $1 \leqslant p < k \leqslant n$. *Рассмотрим в* D *систему функций* $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$. *Предположим, что* $\forall\, \vec{x} \in D$ *ранг матрицы Якоби*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_k(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_k(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

равен $p < k$, *и существует* $\vec{x}^0 \in D$ *такая, что Якобиан*

$$\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1(\vec{x})}{\partial x_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_p(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_p(\vec{x})}{\partial x_p} \end{vmatrix}\right|_{\vec{x}=\vec{x}^0} \neq 0.$$

Тогда существует окрестность $\mathrm{U}\left(\vec{x}^0\right) \subset D$ *такая, что система функций* $u_1(\vec{x}), \ldots, u_p(\vec{x})$ *не является зависимой в* $\mathrm{U}\left(\vec{x}^0\right)$, *и в то же время функции* $u_{p+1}(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ *являются зависимыми от функций* $u_1(\vec{x}), \ldots, u_p(\vec{x})$ *в* $\mathrm{U}\left(\vec{x}^0\right)$.

Замечание 4. 2. Если функции $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ линейно зависимы на D, то они, очевидно, и функционально зависимы на D.

Действительно, если $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ линейно зависимы, то существует номер j и числа $c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_k$ такие, что

$$u_j(\vec{x}) = c_1 u_1(\vec{x}) + \ldots + c_{j-1} u_{j-1}(\vec{x}) + c_{j+1} u_{j+1}(\vec{x}) + \ldots + c_k u_k(\vec{x}).$$

Следовательно, в качестве функции $\varphi(\vec{y})$ в определении 4. 1 достаточно взять

$$\varphi = c_1 y_1 + \ldots + c_{j-1} y_{j-1} + c_{j+1} y_{j+1} + \ldots + c_k y_k \in C^1.$$

Обратное утверждение неверно.

Например, функции $u_1(x) = \sin x$, $u_2(x) = \cos x$ зависимы на $\big(0, \pi\big)$, поскольку $\sin x = \left(1 - \cos^2 x\right)^{\frac{1}{2}}$, но, очевидно, эти функции не являются линейно зависимыми.

Приведем без доказательства теорему о существовании системы из $(n-1)$ независимого первого интеграла.

Теорема 4. 1.
Пусть дана система (1), *где* $\vec{f}(\vec{x}) \in C^1(D)$ *и точка* $\vec{a} \in D$ *не является положением равновесия этой системы, т.е.* $\vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$.

Тогда в некоторой окрестности точки $\vec{a}$ *существует система из* $(n-1)$ *независимых первых интегралов* $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$.

Следующая теорема дает ответ на вопрос о необходимом и достаточном условии, при котором некоторая функция $u(\vec{x})$ является первым интегралом системы (1).

Теорема 4. 2 (критерий первого интеграла)**.**
Пусть дана автономная система (1). *Пусть функция* $u(\vec{x}) \in C^1(D)$ *такова, что* $u(\vec{x}) \not\equiv \mathrm{const}$ *ни в какой подобласти области* D.

Тогда справедливо утверждение:

$u(\vec{x})$ *– первый интеграл системы* (1) *тогда и только тогда, когда*

$$\Big(\operatorname{grad} u(\vec{x}),\ \vec{f}(x)\Big) = 0 \qquad \text{в } D.$$

Доказательство.
Пусть $\vec{x}(t)$ – произвольное решение системы (1). Тогда

$$\frac{du\left(\vec{x}(t)\right)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i} \cdot f_i\left(\vec{x}\right) \equiv \Big(\operatorname{grad} u\left(\vec{x}\right),\ f\big(x\big)\Big). \qquad (2)$$

- Если $u\left(\vec{x}\right)$ – первый интеграл системы (1), то $u\left(\vec{x}(t)\right) \equiv \text{const}$ и левая часть равенства (2) равна нулю. Следовательно, обращается в нуль и правая часть (2).

- Если же $\Big(\operatorname{grad} u\left(\vec{x}\right),\ f\big(x\big)\Big) = 0$, то обращается в нуль и левая часть (2): $\frac{du(\vec{x}(t))}{dt} = 0$, а значит $u\left(\vec{x}(t)\right) \equiv \text{const}$ на любом решении $\vec{x}(t)$ системы (1), откуда следует, что $u\left(\vec{x}\right)$ – первый интеграл системы (1).

$\square$

Следствие. $u\left(\vec{x}\right)$ *– первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (1) *тогда и только тогда, когда* $u\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ *– решение следующего линейного уравнения в частных производных первого порядка:*

$$f_1\left(\vec{x}\right) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + f_n\left(\vec{x}\right) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \qquad (3)$$

Докажем несколько полезных свойств первых интегралов системы (1).

Теорема 4. 3.
Пусть $u_1\left(\vec{x}\right), \ \ldots, \ u_k\left(\vec{x}\right)$ *– первые интегралы системы* (1)*. Пусть* $\Phi\big(y_1, \ldots, y_k\big)$ *– функция класса* C^1*.*

Рассмотрим сложную функцию $u\left(\vec{x}\right) = \Phi\big(u_1\left(\vec{x}\right), \ \ldots, \ u_k\left(\vec{x}\right)\big)$*. Пусть* $u\left(\vec{x}\right) \not\equiv \text{const}$ *ни в какой подобласти области* D*.*

Тогда $u\left(\vec{x}\right)$ *– тоже первый интеграл системы* (1)*.*

Доказательство. Поскольку $u_1\left(\vec{x}\right), \ \ldots, \ u_k\left(\vec{x}\right)$ – первые интегралы системы (1), то на любом решении $\vec{x}(t)$ системы (1) они обращаются в константы:

$$u_1\left(\vec{x}(t)\right) = c_1, \ \ldots, \ u_k\left(\vec{x}(t)\right) = c_k.$$

Тогда и

$$u\left(\vec{x}(t)\right) = \Phi\left(u_1\left(\vec{x}(t)\right), \ \ldots, \ u_k\left(\vec{x}(t)\right)\right) = \Phi\big(c_1, \ \ldots, \ c_k\big) \equiv \text{const},$$

что по определению и означает, что $u\left(\vec{x}\right)$ – первый интеграл системы (1).

$\square$

Следствие. *Система (1) в окрестности любой точки имеет бесконечно много первых интегралов.*

Теорема 4.4.
Рассмотрим систему (1). Пусть точка $\vec{a}$ не является положением равновесия этой системы. Пусть $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$ – $(n-1)$ независимых первых интегралов системы (1) в окрестности точки $\vec{a}$ (их существование гарантировано теоремой 4.1). Пусть $u(\vec{x})$ – еще один первый интеграл системы (1) в окрестности точки $\vec{a}$.

Тогда в этой окрестности $u(\vec{x})$ является зависимой функцией от $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$.

Доказательство. В силу теоремы 4.2 имеем в окрестности точки $\vec{a}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} f_1 + \ \ldots \ + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} f_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} f_1 + \ \ldots \ + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} f_n = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} f_1 + \ \ldots \ + \frac{\partial u}{\partial x_n} f_n = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Положим $\vec{x} = \vec{a}$. Тогда система (4) представляет собой однородную СЛАУ n-го порядка относительно $f_1, \ldots, f_n$, которая имеет ненулевое решение $\{f_1(a), \ldots, f_n(a)\}$. Следовательно, определитель этой системы равен нулю. Но этот определитель представляет собой Якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Значит в силу утверждения 4.1 данного параграфа система функций $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x}), u(\vec{x})$ является зависимой в некоторой окрестности точки $\vec{a}$.

В то же время, функции $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$ не являются зависимыми, поэтому в силу того же утверждения 4.1 ранг матрицы

$$\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{x=a}$$

равен $n-1$, а следовательно, один из миноров $(n-1)$-го порядка этой матрицы не равен нулю.

Применяя утверждение 4.2, получаем, что функция $u(\vec{x})$ является зависимой от функций $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$ в некоторой окрестности точки $\vec{a}$. $\square$

Следствие. *Если $\vec{a}$ не является положением равновесия автономной системы (1), то в окрестности этой точки существует ровно $(n-1)$ независимых первых интегралов, а любая система из n первых интегралов функционально зависима.*

Теорема 4.5.
Если для системы (1) в окрестности точки $\vec{a}$ найдено k независимых первых интегралов, то в окрестности этой точки порядок системы понижается на k единиц.

Доказательство. Пусть $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ $(k \leqslant n-1)$ – независимые первые интегралы системы (1). Тогда согласно утверждению 4.1 матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \text{имеет ранг } k.$$

Переобозначая переменные, можно считать, что

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{в окрестности точки } a. \tag{5}$$

Рассмотрим решение $\vec{x}$ системы (1), проходящее через точку $\vec{a}$. Тогда

$$\begin{cases} u_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv c_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_k(x_1, \ldots, x_n) \equiv c_k \end{cases} \tag{6}$$

на этом решении, в том числе и в точке $\vec{a}$.

В силу условия (5) к системе (6) можно применить теорему о неявной функции, по которой в окрестности точки $\vec{a}$ переменные $x_1, \ldots, x_k$ можно выразить через остальные:

$$\begin{cases} x_1 = w_1(x_{k+1}, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_k), \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_k = w_k(x_{k+1}, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_k). \end{cases}$$

Тогда систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_{k+1} = f_{k+1}\Big(w_1\left(x_{k+1},\ \ldots,\ x_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_k\right),\ \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad w_k\left(x_{k+1},\ \ldots,\ x_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_k\right),\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_n\Big) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f_n\Big(w_1\left(x_{k+1},\ \ldots,\ x_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_k\right),\ \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad w_k\left(x_{k+1},\ \ldots,\ x_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_k\right),\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_n\Big), \end{cases}$$

т.е. порядок системы понизился на k единиц. □

Замечание 4.3. Если $k = n-1$, то в теореме 4.5 получаем уравнение

$$\dot{x}_n = f_n\Big(w_1\left(x_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_{n-1}\right),\ \ldots,\ w_{n-1}\left(x_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_{n-1}\right),\ x_n\Big).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, которое легко решается.

Таким образом, нахождение $n-1$ независимого первого интеграла позволяет полностью решить систему (1) в окрестности неособой точки.

§ – 2. Неавтономные системы ОДУ

Рассмотрим теперь общую систему уравнений первого порядка

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x},\ t), \qquad (\vec{x},\ t) \in G \equiv D \times [0,\ T), \quad D \subset \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

$\vec{f}(\vec{x},\ t) = \big(f_1(\vec{x},\ t),\ \ldots,\ f_n(\vec{x},\ t)\big)$, $\quad f_i \in C^1(G)$.

В развернутом виде система (7) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t\big), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t\big). \end{cases}$$

Это система n-го порядка. Сведем ее к автономной системе $(n+1)$-го порядка.

Для этого введем еще одну переменную $x_{n+1} = t$. Тогда систему (7) можно, очевидно, записать в виде

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}\big), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}\big), \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} = 1\ \big(\equiv f_{n+1}\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}\big).\big) \end{cases} \tag{8}$$

Система (8) – это автономная система $(n+1)$-го порядка. Но тогда для системы (8), а значит, и для исходной системы (7), можно ввести понятие первого интеграла, причем будут справедливы доказанные в § 1 свойства.

Замечание 4.4. Отметим, что $f_{n+1} \equiv 1$, поэтому у системы (8) нет точек равновесия.

Опр. 4.3. Функция $u(\vec{x},\ t)$ называется **первым интегралом системы** (7), если

1) $u(\vec{x},\ t) \not\equiv \mathrm{const}$ ни в какой подобласти области G.

2) Для любой интегральной кривой $\vec{x} = \vec{x}(t)$ – решения системы (7)

$$u\big(x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t),\ t\big) \equiv c, \qquad \forall\, t \in [0,\ T).$$

Теорема 4.6.
Если $f(\vec{x},\ t) \in C^1(G)$, то в окрестности любой точки из G существует система из n независимых первых интегралов системы (7).

Доказательство. Как было показано выше, система (7) сводится к автономной системе $(n+1)$-го порядка, причем в силу замечания 4.4 для этой системы каждая $(\vec{x},\ t) \in G$ не является положением равновесия. Поэтому утверждение теоремы следует из теоремы 4.1. □

Теорема 4.7.
Пусть $u(\vec{x},\ t) \in C^1(G)$ и $u(\vec{x},\ t) \not\equiv \mathrm{const}$ ни в какой подобласти области G. Тогда $u(\vec{x},\ t)$ является первым интегралом системы (7) *тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} f_1(\vec{x},\ t) + \ \ldots\ + \frac{\partial u}{\partial x_n} f_n(\vec{x},\ t) = 0$$

в области G.

Доказательство. Сразу следует из теоремы 4.2. В самом деле, так как $f_{n+1} \equiv 1$, то по теореме 4.2 тот факт, что $u(\vec{x},\ t)$ – первый интеграл системы, равносилен уравнению в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} f_1(\vec{x},\ t) + \ \ldots\ + \frac{\partial u}{\partial x_n} f_n(\vec{x},\ t) + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_{n+1}}}_{\equiv \frac{\partial u}{\partial t}} \underbrace{f_{n+1}(\vec{x},\ t)}_{\equiv 1} = 0.$$

□

Следствие. *$u\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t\big) \in C^1(G)$ – первый интеграл системы (7) тогда и только тогда, когда функция $u\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t\big)$ – решение следующего уравнения в частных производных первого порядка:*

$$u_t + f_1(\vec{x},\ t)u_{x_1} + \ldots + f_n(\vec{x},\ t)u_{x_n} = 0. \tag{9}$$

§ – 3. Симметричная запись систем ОДУ первого порядка

Система (7) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{f_1\big(x_1,\,...,\,x_n,\,t\big)} = \frac{dt}{1}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{f_n\big(x_1,\,...,\,x_n,\,t\big)} = \frac{dt}{1}. \end{cases} \tag{10}$$

Равенства (10) понимаются как пропорции, т.е. если $f_i\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t\big) = 0$, то считается, что и $dx_i = 0$, а соответствующее отношение равно dt.

Учитывая примененный в § 2 прием по введению новой переменной $x_{n+1} = t$, систему (10) можно записать в виде

$$\frac{dx_1}{f_1\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}\big)} = \ \ldots\ = \frac{dx_n}{f_n\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}\big)} = \frac{dx_{n+1}}{1}. \tag{11}$$

Систему (11) можно, очевидно, умножать на любую не равную нулю функцию, и в результате мы придем к системе

$$\frac{dx_1}{\tilde{f}_1\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}\big)} = \ \ldots\ = \frac{dx_n}{\tilde{f}_n\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}\big)} = \frac{dx_{n+1}}{\tilde{f}_{n+1}\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}\big)}. \tag{12}$$

Опр. 4. 4. Запись (12) называют **записью системы** (7) **в симметричной форме**. При этом предполагается, что хотя бы одна из функций $\tilde{f}_i\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}\big)$, $i = 1,\ \ldots,\ n,\ n+1$ не равна нулю.

Рассмотрим автономную систему (1). Будем считать, что $f\,(x_1,\ \ldots, x_n) \neq 0$ в окрестности некоторой точки $\vec{a}$.

Симметричная запись системы (1) будет иметь вид

$$\frac{dx_1}{f_1\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)} = \ \ldots\ = \frac{dx_n}{f_n\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)} = \frac{dt}{1}. \tag{13}$$

В системе (13) n равенств. Но при этом первые $(n-1)$ равенств образуют замкнутую систему уравнений (учтем, что $f(\vec{x}) \neq 0$ в окрестности точки $\vec{a}$).

Поэтому автономной системе (1) соответствует еще одна симметричная запись

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\ \ldots,\ x_n)} = \ \ldots\ = \frac{dx_n}{f_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)}, \tag{14}$$

где в качестве независимой переменной можно взять ту x_i, для которой $f_i(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Замечание 4.5. Если дана система в симметричной форме (14) и $\vec{f}(\vec{x}) \equiv \big(f_1(\vec{x}),\ \ldots,\ f_n(\vec{x})\big) \neq 0$ в окрестности некоторой точки $\vec{a}$, то эту систему можно рассматривать в двух видах:

1) свести ее к автономной системе (1);

2) выбрать одну из переменных за независимую (а именно ту x_i, для которой $f_i(\vec{x}) \neq 0$), получить неавтономную систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_i} = \dfrac{f_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_{i-1}}{dx_i} = \dfrac{f_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}, \\ \dfrac{dx_{i+1}}{dx_i} = \dfrac{f_{i+1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dx_i} = \dfrac{f_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}. \end{cases}$$

Пример 4.2. Рассмотрим систему в симметричной форме

$$\frac{dx_1}{x_1 x_2} = \frac{dx_2}{x_2^2} = \frac{dx_3}{x_2(x_3+1)} \tag{15}$$

в окрестности точки $a \equiv \big(a_1,\ a_2,\ a_3\big)$, $a_2 \neq 0$.

Если мы воспользуемся первым способом, то будем рассматривать автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2^2, \\ \dot{x}_3 = x_2(x_3+1). \end{cases} \tag{16}$$

Для системы (16) нетрудно получить два независимых первых интеграла. Действительно, первое соотношение в (15) дает

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}, \qquad \text{откуда} \quad \ln|x_1| = \ln|x_2| + c_1$$

и мы получаем первый интеграл в виде

$$\frac{x_1}{x_2} = c_1.$$

Второе соотношение в (15) дает

$$\frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3 + 1}, \qquad \text{откуда алалогично}$$

получаем еще один первый интеграл

$$\frac{x_3 + 1}{x_2} = c_2.$$

Найденные первые интегралы, очевидно, независимы, поскольку в первый из них не входи x_3, а во второй – x_1.

Теперь в соответствии с замечанием 4.3 нетрудно получить и общее решение системы (16). Действительно, из второго уравнения имеем $\frac{dx_2}{dt} = x_2^2$, следовательно, $\frac{dx_2}{x_2^2} = dt$, откуда $x_2 = \frac{1}{c_3 - t}$.

Таким образом, получаем решение системы (16) в виде

$$x_1 = \frac{c_1}{c_3 - t}, \qquad x_2 = \frac{1}{c_3 - t}, \qquad x_3 = \frac{1}{c_3 - t} - 1.$$

Фазовыми же траекториями будут линии

$$\begin{cases} x_1 = c_1 x_2, \\ x_3 = \frac{x_2}{c_2} - 1. \end{cases} \tag{17}$$

Систему (15) можно также свести к неавтономной системе вида

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1}{x_2}, \\ \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_3+1}{x_2}. \end{cases} \tag{18}$$

Система (18) легко решается, и, очевидно, общее решение этой системы запишется в виде (17).

Таким образом, интегральные кривые неавтономной системы (18) являются фазовыми траекториями автономной системы (16).

Глава V.

Уравнения в частных производных первого порядка

§ – 1. Однородные линейные уравнения в частных производных первого порядка

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\vec{x} \equiv \bigl(x_1, \ldots, x_n\bigr) \in D$.

Опр. 5. 5. Однородным линейным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \in D; \tag{1}$$

здесь $u\bigl(x_1, \ldots, x_n\bigr)$ – искомая функция, $a_i(\vec{x})$, $i = 1, \ldots, n$ – заданные функции.

Опр. 5. 6. Неоднородным линейным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = a_{n+1}(\vec{x}); \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \in D; \tag{1'}$$

$a_{n+1}(\vec{x}) \neq 0$ в D; $a_{n+1}(\vec{x})$ – также заданная функция.

В данном параграфе мы рассмотрим однородное уравнение (1) при условии, что $a_i(\vec{x}) \in C^1(D)$.

Опр. 5. 7. Решением уравнения (1) называется функция $u(\vec{x}) \in C^1(D)$, обращающая это уравнение в верное равенство $\forall\, \vec{x} \in D$.

Сопоставим уравнению (1) автономную систему ОДУ вида

$$\dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x}), \qquad \vec{a}(\vec{x}) \equiv \big(a_1(\vec{x}),\ \ldots,\ a_n(\vec{x})\big). \tag{2}$$

Опр. 5. 8. Система (2) называется **характеристической системой для уравнения в частных производных** (1), а ее фазовые траектории – **характеристиками**.

Теорема 5. 8.
Функция $u(\vec{x}) \in C^1(D)$ *является решением уравнения* (1) *тогда и только тогда, когда* $u(\vec{x})$ *– первый интеграл системы* (2) *или* $u(\vec{x}) \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Данная теорема является всего лишь перефразированным следствием из теоремы 4. 2, если это следствие рассматривать с точки зрения не системы, а УЧП. □

Из свойств первых интегралов, доказанных в предыдущей главе, вытекает, на основании доказанной теоремы 5. 8, следующее свойство решений уравнения (1).

Теорема 5. 9.
Если функции $u_1(\vec{x}),\ \ldots,\ u_k(\vec{x})$ *являются решениями уравнения* (1), *а* $\Phi\big(y_1,\ \ldots,\ y_k\big)$ *– функция класса* C^1 *от своих аргументов, то* $u(\vec{x}) = \Phi\big(u_1(\vec{x}),\ \ldots,\ u_k(\vec{x})\big)$ *также является решением уравнения* (1).

Доказательство. Данная теорема является непосредственным следствием теоремы 4. 3. □

Теорема 5. 10.
В окрестности любой точки $P \in D$ *существует* $(n-1)$ *независимых решений* $u_1^*(\vec{x}),\ \ldots,\ u_{n-1}^*(\vec{x})$ *уравнения* (1), *а общее решение этого уравнения задается формулой*

$$u(\vec{x}) = \Phi\big(u_1^*(\vec{x}),\ \ldots,\ u_{n-1}^*(\vec{x})\big), \tag{3}$$

где $\Phi\big(y_1,\ \ldots,\ y_k\big)$ *– произвольная функция класса* C^1.

Доказательство. В силу условия $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2(\vec{x}) > 0$ в каждой точке области D, каждая точка $P \in D$ не является точкой покоя характеристической системы (2), а тогда утверждение теоремы вытекает из теорем 4. 1 и 4. 4. □

Теорема 5. 11.
Любое решение уравнения (1) *тождественно равно константе на любой характеристике.*

Доказательство. Если $u(\vec{x})$ – решение уравнения (1), то в силу теоремы 5.8 $u(\vec{x})$ – первый интеграл системы (2) (или $u(\vec{x}) \equiv \mathrm{const}$). Но в силу определения первого интеграла $u\big(\vec{x}(t)\big) \equiv \mathrm{const}$ на любом решении системы (2), т.е. на любой характеристике. □

Пример 5.3. Решим уравнение

$$x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

вне точки $\vec{x} \equiv \big(x_1,\ x_2\big) = 0$.

Характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-x_1},$$

первым интегралом является, например,

$$x_1^2 + x_2^2 = c.$$

Следовательно, общее решение рассматриваемого уравнения можно записать в виде

$$u = \Phi\big(x_1^2 + x_2^2\big), \qquad \text{где} \quad \Phi(y) \in C^1.$$

Это – семейство поверхностей вращения.

§ – 2. Задача Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид $D = D' \times \big(x_n^0 - h,\ x_n^0 + h\big)$, где D' – область переменных $\big(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}\big)$ в R^{n-1}, $h = \mathrm{const} > 0$.

Пусть на области D' задана функция $\varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}\big) \in C^1\big(D'\big)$ – см. рис. 5.1.

Задача Коши для уравнения (1) заключается в том, чтобы найти решение $u(\vec{x})$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)\Big|_{x_n = x_n^0} = \varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}\big). \tag{4}$$

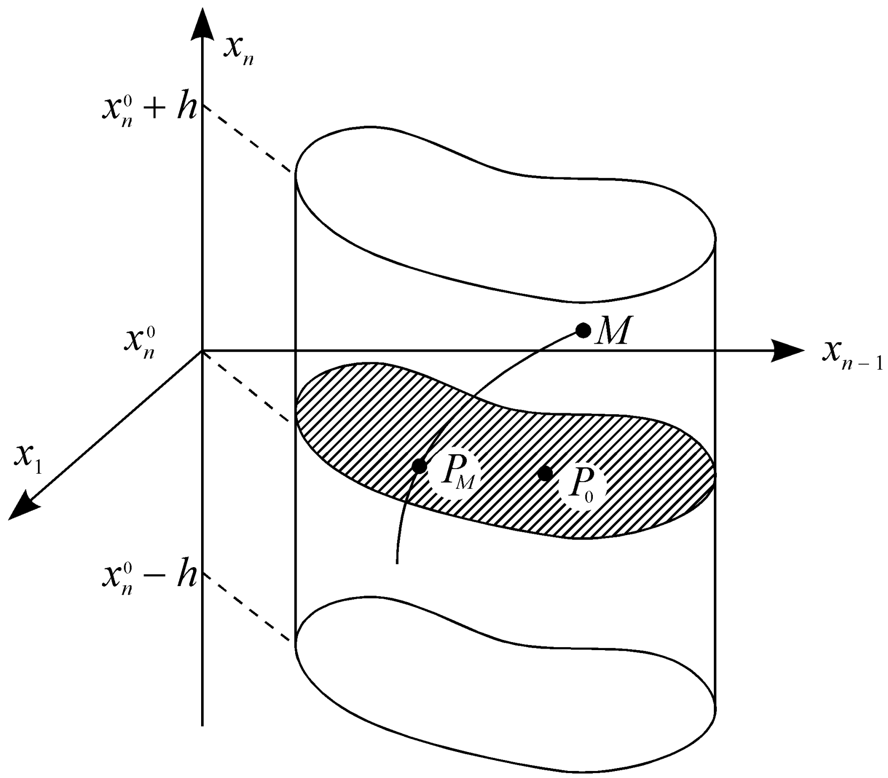

Рис. 5.1. Задача Коши.

Теорема 5.12 (существования и единственности решения задачи Коши)**.**

Рассмотрим задачу Коши (1), (4). Пусть коэффициенты $a_i(\vec{x}) \in C^1(D)$, $\varphi\big(x_1, \ldots, x_{n-1}\big) \in C^1\big(D'\big)$. *Пусть точка* $P^0 \equiv \big(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0\big) \in D$ *такова, что* $a_n\big(P^0\big) \neq 0$.

Тогда найдется окрестность точки P^0, *в которой существует решение* $u(\vec{x})$ *задачи Коши (1), (4), и оно единственно.*

Доказательство. I. **Существование решения.**

Рассмотрим характеристическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(\vec{x}), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(\vec{x}). \end{cases} \tag{2}$$

Поскольку по условию теоремы $a_n\big(P^0\big) \neq 0$, то в силу теоремы 9.1 из главы 9, § 1, в окрестности точки P^0 существует $(n-1)$ независимых первых интегралов $\psi_1(\vec{x}), \ldots, \psi_{n-1}(\vec{x})$ системы (2). При этом поскольку $a_n\big(P^0\big) \neq 0$, то по той же теореме 9.1 в указанной окрестности точки P^0

Якобиан

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_{n-1}} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} \xi_1 = \psi_1(x_1,\ \ldots,\ x_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \xi_{n-1} = \psi_{n-1}(x_1,\ \ldots,\ x_n) \\ \xi_n = x_n. \end{cases}$$

Якобиан этой замены

$$\frac{D(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)}{D(x_1,\ \ldots,\ x_n)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

в силу условия (5). Таким образом, замена переменных является невырожденной в окрестности точки P^0.

Перепишем уравнение (1) в новых переменных. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j}\,\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}.$$

Следовательно, уравнение (1) перепишется в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(\vec{x})\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j}\,\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}\right) = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k(\vec{x})\,\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}\right) = 0.$$

Если $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$ то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(\vec{x})\,\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k(\vec{x})\,\frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} = \left.\frac{d\psi_j}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = 0,$$

поскольку $\psi_j(\vec{x})$ – первый интеграл системы (2). Если же $j = n,$ то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(\vec{x})\,\frac{\partial \xi_n}{\partial x_k} = a_n(\vec{x}).$$

Таким образом, в новых переменных уравнение (1) записывается в виде

$$a_n\bigl(\vec{x}(\xi)\bigr)\frac{\partial u\bigl(\vec{x}(\xi)\bigr)}{\partial \xi_n} = 0.$$

Но в окрестности точки P^0 $a_n\bigl(\vec{x}\bigr)$, поэтому окончательно получаем уравнение

$$\frac{\partial u\bigl(\vec{x}(\xi)\bigr)}{\partial \xi_n} = 0. \qquad (6)$$

Начальное условие (4) в новых переменных перепишется в виде

$$u\bigl(\vec{x}(\xi)\bigr)\Big|_{\xi_n=x_n^0} = \varphi\bigl(x_1(\xi),\ \ldots,\ x_{n-1}(\xi)\bigr)\Big|_{\xi_n=x_n^0}.$$

Но тогда в силу (6) имеем

$$u\bigl(\vec{x}(\xi)\bigr) = u\bigl(\vec{x}(\xi)\bigr)\Big|_{\xi_n=x_n^0} =$$
$$= \varphi\left(x_1\bigl(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1},\ x_n^0\bigr),\ \ldots,\ x_{n-1}\bigl(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1},\ x_n^0\bigr)\right). \qquad (7)$$

Таким образом, решение уравнения (1) в окрестности точки P^0 существует и задается формулой (7).

II. **Докажем единственность решения задачи Коши (1), (4).**

Пусть, напротив, эта задача в некоторой окрестности точки P^0 имеет два решения $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$. Тогда функция $w(\vec{x}) = u(\vec{x}) - v(\vec{x})$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\vec{x})\, w = 0, \\ w\Big|_{x_n=x_n^0} = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Рассмотрим семейство характеристик уравнения (1) в окрестности точки P^0.

По условию теоремы $a_n\bigl(P^0\bigr) \neq 0$, поэтому применима теорема 9.8 из главы 9, § 3, в силу которой существует такая окрестность точки P^0 для которой через каждую точку этой окрестности проходит характеристика и притом единственная.

Поскольку в системе (2) $a_n(\vec{x}) \neq 0$ в окрестности точки P^0, то, как можно показать, все характеристики пересекаю плоскость $x_n = x_n^0$ (возможно, для меньшей окрестности точки P^0).

Пусть теперь M – произвольная точка выбранной окрестности. Проведем через нее характеристику до пересечения с плоскостью $x_n = x_n^0$ в некоторой точке P_M (см. рис. 5. 1.).

С одной стороны, $w\big(P_M\big) = 0$ в силу (8).

С другой стороны, по доказанному в первой части теоремы, $w(\vec{x}) = \mathrm{const}$ на любой характеристике.

Следовательно, $w(M) = 0$. В силу произвольного выбора M имеем $w(\vec{x}) \equiv 0$ в окрестности точки P^0, т.е. $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$. Противоречие. $\square$

Замечание 5.6. Геометрически задача Коши (1), (4) заключается в следующем:

– из каждой точки P плоскости $x_n = x_n^0$ в окрестности P^0 выпускаем характеристику;

– существует некоторая окрестность точки P^0, в которой эти характеристики не пересекаются и заполняют всю окрестность;

– вдоль характеристики «сносится» значение начальных данных $\varphi\big(P\big)$ без изменения, т.е. зная характеристики, мы решаем задачу Коши.

Замечание 5.7. По характеристикам «сносятся», вообще говоря, разные значения $\varphi\big(P\big)$ с плоскости $x_n = x_n^0$, поэтому решение задачи Коши будет существовать, пока характеристики не начнут пересекаться. Как только это произойдет, решение разрушается (см. рис. 5.2.)

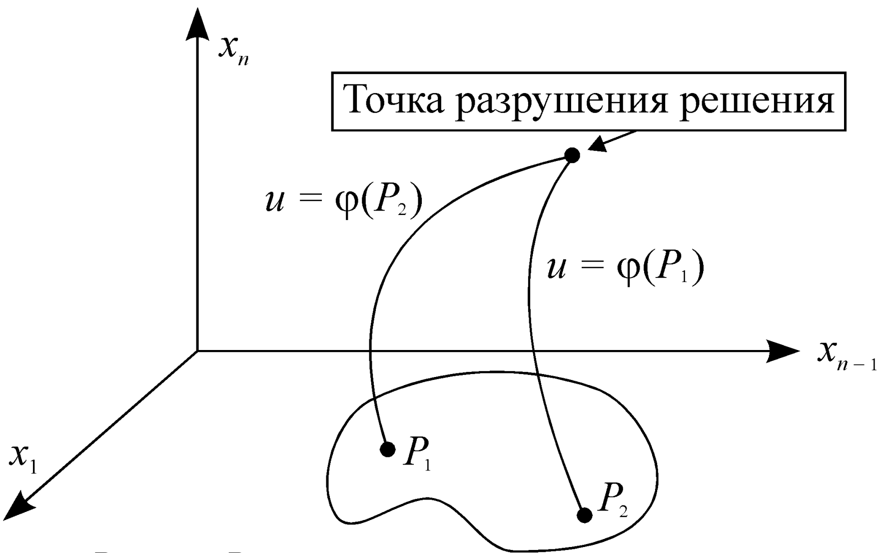

Рис. 5.2. Разрушение решений в точке пересечения характеристик.

§ – 3. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

Пусть, как и выше, D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\vec{x} \equiv \big(x_1, \ \ldots, \ x_n\big) \in D$, $u \in U$, $\Omega = D \times U$, U – некоторый интервал из $\mathbb{R}^1$.

Опр. 5.9. Квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i\big(x_1, \ \ldots, \ x_n, \ u\big)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b\big(x_1, \ \ldots, \ x_n, \ u\big); \tag{9}$$

при этом предполагается, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2(\vec{x}, \ u) > 0 \quad \forall(\vec{x}, \ u) \in \Omega$.

Будем также предполагать, что функции $a_i(\vec{x}, \ u)$, $i = 1, \ \ldots, \ n$ и $b(\vec{x}, \ u) \in C^1\big(\Omega\big)$ – заданные функции.

Опр. 5.10. Решением уравнения (9) **в области** D будем называть функцию $u(\vec{x}) \in C^1(D)$, обращающую это уравнение в верное равенство в каждой точке $\vec{x} \in D$.

Геометрически – решение уравнения (9) представляет собой поверхность в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $\big(\vec{x}, \ u\big)$.

Сопоставим квазилинейному уравнению (9) следующее линейное однородное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\big(x_1, \ \ldots, \ x_n, \ u\big)\frac{\partial v}{\partial x_i} + b\big(x_1, \ \ldots, \ x_n, \ v\big)\frac{\partial v}{\partial u} = 0. \tag{10}$$

Связь между этими уравнениями определяется следующей теоремой.

Теорема 5.13.
Пусть $v = V\big(x_1, \ \ldots, \ x_n, \ u\big)$ *– решение уравнения* (10)*; пусть точка* $Q^0 = \big(x_1^0, \ \ldots, \ x_n^0, \ u^0\big)$ *такова, что*

$$\left.\frac{\partial V}{\partial u}\right|_{Q^0} \neq 0, \qquad V\left(x_1^0, \ \ldots, \ x_n^0, \ u^0\right) = 0.$$

В этом случае в силу теоремы о неявной функции соотношение

$$V\big(x_1, \ \ldots, \ x_n, \ u\big) = 0 \tag{11}$$

определяет в окрестности Q^0 *некоторую функцию* $u = \varphi(x)$.

Тогда утверждается, что функция $u = \varphi(x)$ *является решением уравнения* (9) *в окрестности точки* $P^0 = \big(x_1^0, \ \ldots, \ x_n^0\big)$.

Доказательство. Пусть $u = \varphi(x)$ – решение функционального уравнения (11). Тогда в силу теоремы о неявной функции

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial V\left(\vec{x}, u\right)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V\left(\vec{x}, u\right)}{\partial u}}.$$

Подставляя эти выражения в левую часть уравнения (9), получим

$$L(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} a_i\left(\vec{x},\ \varphi\right)\frac{\dfrac{\partial V\left(\vec{x}, u\right)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V\left(\vec{x}, u\right)}{\partial u}}. \tag{12}$$

Но $V\left(\vec{x},\ u\right)$ – решение уравнения (10) (для всех u, в том числе и для $u\varphi(\vec{x})$). Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\left(\vec{x},\ \varphi\right)\frac{\partial V\left(\vec{x},\ u\right)}{\partial x_i} = -b\left(\vec{x},\ \varphi\right)\frac{\partial V\left(\vec{x},\ u\right)}{\partial u},$$

т.е.

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i\left(\vec{x},\ \varphi\right)\frac{\dfrac{\partial V\left(\vec{x}, u\right)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V\left(\vec{x}, u\right)}{\partial u}} = b\left(\vec{x},\ \varphi\right),$$

поэтому из (12) следует, что

$$L(\varphi) = b\left(\vec{x},\ \varphi\right),$$

что и означает выполнение уравнения (9) для функции $\varphi(\vec{x})$. Теорема доказана. □

Замечание 5.8. Уравнение (10) соответствует автономной системе ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1\left(\vec{x},\ u\right), \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_n\left(\vec{x},\ u\right), \\ \dot{u} = b\left(\vec{x},\ u\right), \end{cases} \tag{13}$$

которую в симметричной форме (см. главу 9, § 3) можно записать в виде

$$\frac{dx_1}{a_1\left(\vec{x},\ u\right)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n\left(\vec{x},\ u\right)} = \frac{du}{b\left(\vec{x},\ u\right)}. \tag{14}$$

Опр. 5.11. Система (13) (или в симметричной форме записи (14)) называется **характеристической системой для квазилинейного уравнения** (9). Фазовые траектории системы (13) (или, что то же самое, интегральные кривые системы (14)) называются **характеристиками**.

Из теоремы 5.13 с учетом замечания 5.8 вытекает алгоритм нахождения решений уравнения (9).

Алгоритм решения квазилинейного уравнения

1) Записываем характеристическую систему (14).

2) Находим n независимых первых интегралов этой системы

$$\psi_1\big(\vec{x},\ u\big) = c_1, \quad \ldots, \quad \psi_n\big(\vec{x},\ u\big) = c_n.$$

3) Строим общий интеграл системы (14) в виде

$$v = V\left(\psi_1\big(\vec{x},\ u\big),\ \ldots,\ \psi_n\big(\vec{x},\ u\big)\right), \tag{15}$$

где $V\big(y_1,\ \ldots,\ y_n\big)$ – произвольная функция класса C^1 от своих аргументов, причем $\frac{dV}{du} \neq 0$ в окрестности некоторой точки $Q^0 = \big(P^0,\ u^0\big)$.

В силу теоремы 5.9 формула (15) задает решение линейного уравнения (10).

4) Решение $u(\vec{x})$ уравнения (9) в окрестности точки P^0 находим по теореме о неявной функции как решение функционального уравнения

$$V\left(\psi_1\big(\vec{x},\ u\big),\ \ldots,\ \psi_n\big(\vec{x},\ u\big)\right) = 0. \tag{16}$$

Замечание 5.9. Вообще говоря, не исключена возможность существования решений $u = \varphi^*(\vec{x})$ уравнения (9), которые не получаются из формулы (16), поскольку условия теоремы 5.13 являются только достаточными для существования решений уравнения (9) и не являются необходимыми.

Такие решения могут существовать. Они называются **специальными решениями**, но мы их рассматривать не будем.

Поэтому решение, получаемое из формулы (16), будем называть **общим решением** уравнения (9) (в окрестности точки P^0).

Замечание 5. 10. При построении первых интегралов системы (14) в ряде случаев может оказаться, что переменная u войдет только в один из них:

$$\psi_1(x) = c_1, \ \ldots, \ \psi_{n-1}(x) = c_{n-1}, \ \psi_n(x, u) = c_n.$$

Тогда общее решение будет находиться из соотношения

$$V\big(\psi_1(x), \ \ldots, \ \psi_{n-1}(x), \ \psi_n(x, u)\big) = 0,$$

которое можно по теореме о неявной функции переписать в виде

$$\psi_n(x, u) = f\left(\psi_1(\vec{x}, u), \ \ldots, \ \psi_{n-1}(x)\right). \tag{17}$$

Разрешив равенство (17) относительно u, мы получим общее решение уравнения (9) в явном виде.

В частности, однородное линейное уравнение (1) можно рассматривать как частный случай уравнения (9).

Характеристическая система (14) запишется в этом случае в виде

$$\frac{dx_1}{a_1(x)} = \ \ldots \ = \frac{dx_n}{a_n(x)} = \frac{du}{0}.$$

Система из n независимых первых интегралов может быть выбрана следующим образом

$$\psi_1(x) = c_1, \ \ldots, \ \psi_{n-1}(x) = c_{n-1}, \ u = c_n.$$

Видим, что переменная u войдет только в последний первый интеграл. Решение уравнения может быть записано по формуле (17), которая в данном случае совпадает с формулой (3).

Замечание 5. 11. Теорема 5. 13 сводит решение квазилинейного уравнения к решению линейного уравнения, которое в соответствии с теоремой 5. 10 решалось локально в окрестности некоторой точки.

Таким образом, мы можем гарантировать разрешимость уравнения (9) тоже только локально, хотя реально полученное решение может существовать и глобально.

Пример 5. 4. Решим уравнение

$$x_2\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 - x_2.$$

Характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{du}{x_1 - x_2}.$$

Первое равенство

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1}$$

перепишется в виде $x_1 dx_1 = x_2 dx_2$ и приводит к первому интегралу

$$x_1^2 - x_2^2 = c_1.$$

Для получения другого первого интеграла воспользуемся свойством сложения пропорций:

$$\frac{d\big(x_2 - x_1\big)}{x_1 - x_2} = \frac{du}{x_1 - x_2},$$

откуда получаем первый интеграл

$$u + x_1 - x_2 = c_2.$$

Поскольку u входит только в один из полученных первых интегралов, то получаем решение уравнения в явном виде

$$u = x_2 - x_1 + f\big(x_1^2 - x_2^2\big),$$

функция $f(y)$ – произвольная функция класса C^1.

Пример 5. 5. Решим уравнение

$$\big(x_2 + 2u^2\big)\frac{\partial u}{\partial x_1} - 2x_1^2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^2.$$

Характеристическая система запишется в виде

$$\frac{dx_1}{x_2 + 2u^2} = \frac{dx_2}{-2x_1^2 u} = \frac{du}{x_1^2}.$$

Из второго соотношения имеем $dx_2 = -2u du$, откуда получаем первый интеграл

$$x_2 + u^2 = c_1. \tag{18}$$

Подставляя $x_2 = c_1 - u^2$ в соотношение $\frac{dx_1}{x_2+2u^2} = \frac{du}{x_1^2}$, получаем $\frac{dx_1}{c_1+u^2} = \frac{du}{x_1^2}$, откуда $x_1^2\, dx_1 = \big(c_1 + u^2\big)du$, а следовательно,

$$\frac{x_1^3}{3} = c_1 u + \frac{u^3}{3} + c_2.$$

Подставляя сюда c_1 из (18), получаем еще один первый интеграл

$$x_1^3 - 3\big(x_2 + u^2\big)u - u^3 = c_2.$$

Тогда общее решение уравнения запишется в неявном виде

$$V\left(x_2+u^2,\ x_1^3-3\big(x_2+u^2\big)u-u^3\right)=0,$$

где функция $V\big(y_1,\ y_2\big)$ – произвольная функция класса C^1 и такая, что

$$\frac{\partial V\left(x_2+u^2,\ x_1^3-3\big(x_2+u^2\big)u-u^3\right)}{\partial u}\neq 0.$$

Следующие две теоремы объясняют геометрический смысл характеристик квазилинейного уравнения (9).

Теорема 5. 14.
Всякая интегральная поверхность $u=\varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)$ *уравнения* (9) *(график решения этого уравнения) состоит из характеристик в том смысле, что через каждую точку этой поверхности проходит характеристика, целиком лежащая на этой поверхности.*

Доказательство. Обозначим интегральную поверхность $u=\varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)$ через S. Пусть $P\equiv(x,\ u)$ – произвольная точка этой поверхности; обозначим через Q – проекцию точки P на гиперплоскость переменных $\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)$ – см. рис. 5. 3.

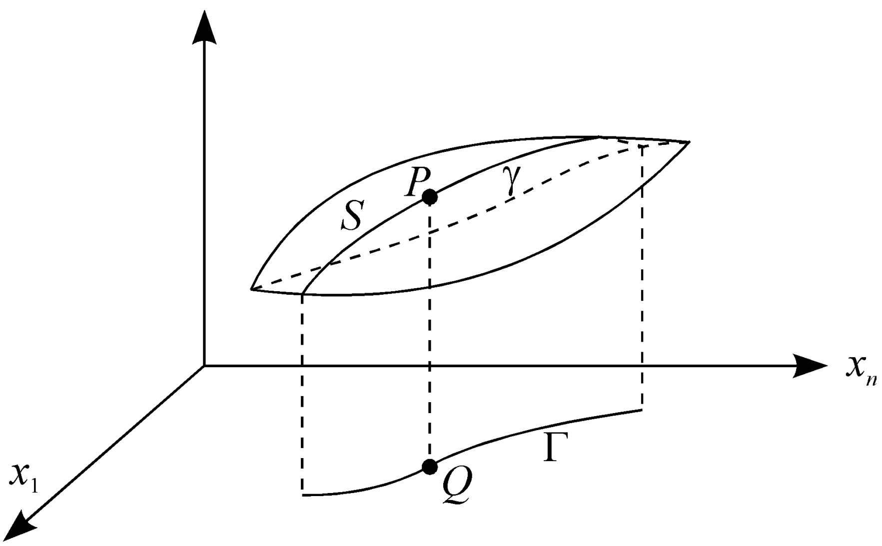

Рис. 5. 3. Интегральная поверхность.

Рассмотрим систему ОДУ вида

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_1\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)\right),\\ \ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_n=a_n\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)\right).\end{cases}\tag{19}$$

Эта система определяет интегральные кривые (решения системы) в пространстве $\mathbb{R}^n$ переменных $\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)$.

Рассмотрим интегральную кривую Γ, проходящую через точку Q (рис. 5. 3.). Пусть в параметрической форме она задается уравнениями

$$x_i = x_i(t), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $\bigl(x,\ u\bigr)$ ей будет соответствовать кривая γ, проходящая через точку P и лежащая на поверхности S (см. рис. 5. 3.). Тогда γ задается уравнениями

$$\begin{cases} x_i = x_i(t), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\ u = \varphi\bigl(x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)\bigr). \end{cases} \tag{20}$$

Покажем, что кривая γ является характеристикой, т.е. функции $\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u\bigr)$ из (20) удовлетворяют характеристической системе (13).

В силу соотношений (19) первые n уравнений системы (13), очевидно, удовлетворяются. Осталось проверить выполнение последнего, $(n+1)$-го уравнения.

Имеем

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,a_i\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)\right). \tag{21}$$

Но функция $u = \varphi\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)$ по условию является решением уравнения (9), поэтому последняя сумма в соотношении (21) равна $b\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)\right)$. Таким образом,

$$\frac{du}{dt} = b\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)\right) \equiv b\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u\bigr),$$

т.е. и последнее уравнение системы (13) выполнено. Теорема доказана. □

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 5. 15.
Если поверхность S, задаваемая функцией $u = \varphi\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)$, (где $\varphi(x)$ – функция класса C^1 своих аргументов) состоит из характеристик уравнения (9), то функция $u = \varphi\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)$ является решением уравнения (9).

Доказательство. Пусть γ – характеристика уравнения (9), задаваемая параметрически в виде

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \dots\dots\dots \\ x_n = x_n(t) \\ u = u(t). \end{cases}$$

Тогда по определению характеристики функции $x_1(t)$, $\dots$, $x_n(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе (13), а следовательно,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x,\,u) \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_n(x,\,u) \\ \dot{u} = b(x,\,u). \end{cases}$$

Но тогда касательный вектор τ к кривой γ в точке $P = \big(x,\,u\big)$ имеет вид

$$\tau = \big(a_1(x,\,u),\, \dots,\, a_n(x,\,u),\, b(x,\,u)\big).$$

С другой стороны, вектор нормали N к поверхности S в точке $(x,\,u)$ имеет вид

$$N = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\, \dots,\, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n},\, -1\right).$$

Скалярное произведение $\big(\tau,\,N\big) = 0$, поэтому имеем соотношение

$$a_1(x,\,u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \dots + \vec{a}_n(x,\,u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} - b(x,\,u) = 0,$$

которое означает, что функция $u = \varphi\big(x_1,\,\dots,\,x_n\big)$ удовлетворяет уравнению (9). □

Замечание 5.12. Из доказанных теорем вытекает геометрическое построение решения уравнения (9):

1) n независимых первых интегралов характеристической системы (13) можно рассматривать как n-параметрическое семейство характеристик

$$\begin{cases} \psi_1\big(x_1\ \dots,\, x_n,\, u\big) = c_1 \\ \dots\dots\dots \\ \psi_n\big(x_1\ \dots,\, x_n,\, u\big) = c_n, \end{cases}$$

зависящих от n параметров c_1, $\dots$, c_n, и заполняющих некоторую область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $\big(x_1\ \dots,\, x_n,\, u\big)$.

2) Наша задача – «склеить» из этих характеристик гладкую поверхность, которая будет тогда интегральной поверхностью уравнения (9).

3) Чтобы это сделать, наложим на параметры $c_1, \ldots, c_n$ гладкую связь:

$$V(c_1, \ldots, c_n) = 0. \tag{22}$$

4) Подставляя в (22) первые интегралы характеристической системы, как раз и придем к формуле (16), задающей общее решение уравнения (9).

§ – 4. Задача Коши для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка

Для простоты формулировок рассмотрим случай $n = 2$.

Тогда уравнение (9) можно записать в виде

$$a_1(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} = b(x, y, u), \qquad (x, y, u) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3. \tag{23}$$

Опр. 5. 12. Задача Коши для уравнения (23) состоит в нахождении интегральной поверхности $u = \varphi(x, y)$ (решения уравнения (23)), проходящей через заданную линию L, которая параметрически задана в виде

$$\begin{cases} x = x^*(t) \\ y = y^*(t) \\ u = u^*(t). \end{cases} \tag{24}$$

Опишем, как решается задача Коши (23), (24). Из результатов предыдущего параграфа вытекает, что общее решение уравнения (23) может быть записано как неявная функция $u(x, y)$, получаемая из уравнения

$$V\left(\psi_1(x, y, u), \psi_2(x, y, u)\right) = 0, \tag{25}$$

$$\text{где} \quad \psi_1(x, y, u) = c_1, \quad \psi_2(x, y, u) = c_2 \ - \tag{26}$$

два независимых первых интеграла характеристической системы.

Таким образом, соотношение (25) представляет собой связь $V(c_1, c_2) = 0$ на параметры c_1, c_2 (см. замечание 5. 11 и, в частности, соотношение (22) из предыдущего параграфа).

Чтобы решить задачу Коши, нам требуется выбрать такую связь (т.е. такую функцию V), чтобы соответствующее однопараметрическое семейство характеристик (образующее в силу результатов предыдущего параграфа искомую интегральную поверхность) пересекало бы кривую L.

Подставим соотношения (24) в (16):

$$\begin{cases} \psi_1\big(x^*(t),\ y^*(t),\ u^*(t)\big) = c_1 \\ \psi_2\big(x^*(t),\ y^*(t),\ u^*(t)\big) = c_1. \end{cases} \tag{27}$$

Очевидно, характеристики будут пересекать L тогда и только тогда, когда оба соотношения в (27) удовлетворяются при одних и тех же t.

Исключая t из (27) (если это возможно), мы получаем искомую связь на параметры c_1, c_2:

$$V^*\left(c_1,\ c_2\right) = 0. \tag{28}$$

Подставляя в (28) первые интегралы из (26), получаем искомое решение задачи Коши:

$$V^*\left(\psi_1\big(x,\ y,\ u\big),\ \psi_2\big(x,\ y,\ u\big)\right) = 0. \tag{29}$$

Действительно, формула (29) задает решение уравнения (23) в силу теоремы 5.13.

С другой стороны, в силу (27) и (28)

$$V^*\left(\psi_1\big(x^*(t),\ y^*(t),\ u^*(t)\big),\ \psi_2\big(x^*(t),\ y^*(t),\ u^*(t)\big)\right) = 0,$$

следовательно, интегральная поверхность, задаваемая соотношениями (29), проходит через линию L.

Замечание 5.13. Если линия L сама является характеристикой, то по определению первого интеграла соотношения (27) выполняются тождественно для любого t, т.е. t из (27) исключить нельзя.

В этом случае задача Коши поставлена некорректно, поскольку имеется много решений задачи Коши (23), (24).

Геометрически это тоже понятно, поскольку в этом случае все характеристики, «выпущенные» из точек на L, совпадают с L и не будут образовывать никакой определенной интегральной поверхности – см. рис. 5.4..

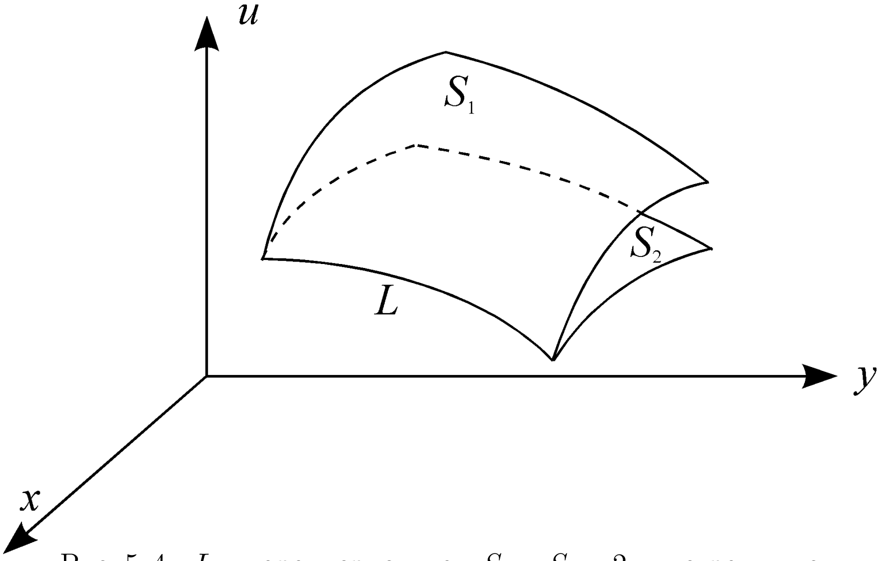

Рис. 5.4. L – характеристика, S_1 и S_2 – 2 интегральные поверхности, проходящие через L.

Пример 5.6. Требуется найти решение задачи Коши для уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u^2-x^2-y^2, \tag{30}$$

проходящее через линию L

$$u=2x-x^2, \qquad y=1-x. \tag{31}$$

Характеристическая система для уравнения (30) имеет вид

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{u^2-x^2-y^2}. \tag{32}$$

Из первого соотношения находим первый интеграл в виде

$$\frac{y}{x}=c_1. \tag{33}$$

Чтобы найти другой первый интеграл, воспользуемся свойством сложения пропорций:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{u^2-x^2-y^2}=\frac{2x\,dx}{2x^2}=\frac{2y\,dy}{2y^2}=\frac{du+2x\,dx+2y\,dy}{u+x^2+y^2}=$$
$$=\frac{du+dx^2+dy^2}{u+x^2+y^2}=\frac{d\left(u+x^2+y^2\right)}{u+x^2+y^2},$$

откуда имеем

$$\frac{u+x^2+y^2}{x}=c_2. \tag{34}$$

Общее решение уравнения (30) можно теперь записать в виде (см. замечание 5. 10)

$$\frac{u+x^2+y^2}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{или}$$

$$u = -x^2 - y^2 + x f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad f \in C^1 \ - \ \text{произвольная функция.}$$

Чтобы решить задачу Коши, подставим в первые интегралы (33) и (34) соотношение (31). Имеем:

$$\frac{1-x}{x} = c_1, \qquad \frac{2x - x^2 + x^2 + (1-x)^2}{x} = c_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1+x^2}{x} = c_2.$$

Исключим здесь x и установим соотношение между c_1 и c_2:
из первого равенства $x = \frac{1}{1+c_1}$; подставив во второе равенство, получим

$$1 + c_1 + \frac{1}{1+c_1} = c_2.$$

Подставляя сюда вместо c_1 и c_2 первые интегралы из (33) и (34), получаем искомое решение задачи Коши:

$$1 + \frac{y}{x} + \frac{1}{1+\frac{y}{x}} = \frac{u+x^2+y^2}{x}$$

или после преобразований

$$u = -x^2 - y^2 + x + y + \frac{x^2}{x+y}.$$

Литература

[1] *Демидович Б. П.* **Лекции по математической теории устойчивости**// М.: «Наука», 1967.

[2] *Камынин Л. И.* **Курс математического анализа**// М., 2001.

[3] *Понтрягин Л. С.* **Обыкновенные дифференциальные уравнения**// М., «Наука», 1974.

[4] *Филиппов А. Ф.* **Введение в теорию дифференциальных уравнений**// М., 2004.