Глава VI.

Простейшие задачи вариационного исчисления

§ – 1. Функционалы в линейном нормированном пространстве

Опр. 6. 1. Функционалом $J[y]$ в линейном нормированном пространстве E называется закон соответствия, по которому каждому элементу y некоторого множества $D \subset E$ ставится в соответствие число:

$$\forall\, y \in D \quad \exists\,!\;\; J[y] \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

При этом D называется **областью определения** $J[y]$, а выражение y – **аргументом функционала** f.

Пример 6. 1. Функционалами в n-мерном евклидовом пространстве E^n являются, например, такие отображения:

$$J\big[\vec{y}\big] = y_1, \qquad J\big[\vec{y}\big] = y_n, \qquad J\big[\vec{y}\big] = y_1 + \ldots + y_n,$$

поскольку все они ставят в соответствие каждому вектору какое-то число.

Пример 6. 2. Функционалами в пространстве непрерывных функций $C\big[a,\ b\big]$ являются следующие отображения:

$$J\big[\varphi\big] = \varphi(a), \qquad J\big[\varphi\big] = \varphi(b), \qquad J\big[\varphi\big] = \int\limits_a^b \varphi(x)dx,$$

поскольку все они ставят в соответствие каждой функции $\varphi(x) \in C\big[a,\ b\big]$ некоторое число.

Опр. 6. 2. Функционал $l[y]$ в линейном пространстве E называется **линейным**, если он имеет на своей области определения свойства линейности:

1) $\forall\, y,\ z \in D \qquad l[y+z] = l[y] + l[z]$;

2) $\forall\, y \in D \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \qquad l[\alpha y] = \alpha l[y]$.

Пример 6. 3. Все функционалы из примера 6. 1 линейны:

$$J\big[\vec{y}\big] = y_1 \qquad \Longrightarrow \qquad J\left[\alpha\vec{y} + \beta\vec{z}\right] = \alpha y_1 + \beta z_1 = \alpha J\big[\vec{y}\big] + \beta J\big[\vec{z}\big],$$

$$J\big[\vec{y}\big] = y_n \qquad \Longrightarrow \qquad J\left[\alpha\vec{y} + \beta\vec{z}\right] = \alpha y_n + \beta z_n = \alpha J\big[\vec{y}\big] + \beta J\big[\vec{z}\big],$$

$$J\big[\vec{y}\big] = y_1 + \ldots + y_n \qquad \Longrightarrow \qquad J\left[\alpha\vec{y} + \beta\vec{z}\right] = \\ = \alpha\big(y_1 + \ldots + y_n\big) + \beta\big(z_1 + \ldots + yz_n\big) = \alpha J\big[\vec{y}\big] + \beta J\big[\vec{z}\big].$$

С другой стороны, функционалы

$$J\big[\vec{y}\big] = \big|\vec{y}\big|, \qquad J\big[\vec{y}\big] = y_1^2 \quad \text{и т.п.}$$

нелинейны, так как

$$J\left[\vec{y} + \vec{z}\right] = \left|\vec{y} + \vec{z}\right| \leqslant J\left[\vec{y}\right] + J\left[\vec{z}\right] \qquad \text{(неравенство треугольника)},$$

$$J\left[\vec{y} + \vec{z}\right] = \big(y_1 + z_1\big)^2 \neq y_1^2 + z_1^2 = J\left[\vec{y}\right] + J\left[\vec{z}\right].$$

Пример 6. 4. Все функционалы из примера 6. 2, как нетрудно видеть, линейны. В то же время можно привести пример и нелинейного функционала на пространстве $C\big[a,\ b\big]$:

$$J\big[\varphi\big] = \varphi^2(a), \qquad J\big[\varphi\big] = \int\limits_a^b \big|\varphi(x)\big|\, dx$$

и тому подобные.

§ – 2. Приращения и вариации

Опр. 6. 3. Приращением (вариацией) $\delta y = \Delta y$ **аргумента** y **функционала** $J[y]$ называется произвольный элемент $z \in D$ такой, что $y + z \in D$. **Приращением** Δf **функционала** $J[y]$ **в «точке»** $y \in D$ называется разность

$$\Delta f = J\big[y + \delta y\big] - J\big[y\big].$$

Пример 6. 5. В пространстве E^n для линейных функционалов

$$J\big[\vec{y}\big] = y_1, \qquad G\big[\vec{y}\big] = y_n, \qquad H\big[\vec{y}\big] = y_1 + \ldots + y_n$$

имеем:

приращение аргумента: $\delta\vec{y}$ – любой вектор $\vec{z}$ из E^n;

приращение функционала в точке $\vec{y}$**:**

$$\Delta J\big[\vec{y}\big] = J\big[\vec{y} + \delta\vec{y}\big] - J\big[\vec{y}\big] = J\big[\vec{y} + \vec{z}\big] - J\big[\vec{y}\big] = y_1 + z_1 - y_1 = z_1;$$

$$\Delta G\big[\vec{y}\big] = g\big[\vec{y} + \delta\vec{y}\big] - H\big[\vec{y}\big] = g\big[\vec{y} + \vec{z}\big] - H\big[\vec{y}\big] = y_n + z_n - y_n = z_n;$$

$$\Delta H\big[\vec{y}\big] = H\big[\vec{y} + \vec{z}\big] - H\big[\vec{y}\big] =$$

$$= \big(y_1 + \ldots + y_n + z_1 + \ldots + z_n\big) - \big(y_1 + \ldots + y_n\big) = \big(z_1 + \ldots + z_n\big).$$

Аналогично, в пространстве непрерывных функций $C\big[a,\ b\big]$ для линейных функционалов

$$J\big[\varphi\big] = \varphi(a), \qquad H\big[\varphi\big] = \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx$$

имеем:

приращение аргумента: $\Delta\varphi$ – любая непрерывная функция $\psi \in C\big[a,\ b\big]$;

приращение функционала в «точке» $\varphi(x)$**:**

$$\Delta J\big[\varphi(x)\big] = J\big[\varphi(x) + \Delta\varphi(x)\big] - J\big[\varphi(x)\big] = J\big[\varphi(x) + \psi\big] - J\big[\varphi\big] =$$
$$\varphi(a) + \psi(a) - \varphi(a) = \psi(a);$$

$$\Delta H\big[\varphi\big] = h\big[\vec{y} + \delta\vec{y}\big] - H\big[\vec{y}\big] = \int\limits_a^b \big(\varphi(x) + \psi(x)\big)\, dx - \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx = \int\limits_a^b \psi(x)\, dx.$$

Опр. 6. 4. Пусть приращение (необязательно линейного) функционала $J[y]$ в «точке» $y \in D$ можно представить в виде

$$\Delta J[y] = L\,[y,\ \delta y] + \alpha\,(y,\ \delta y)\ \big\|\delta y\big\|, \tag{2}$$

где $L\,[y,\ \delta y]$ – некоторый функционал, линейный по второму аргументу, а $\alpha\,(y,\ \delta y) \to 0$ при $\big\|\delta y\big\| \to 0$.

В случае, когда такое представление возможно, функционал называется **дифференцируемым в «точке»** $y \in D$ **по Фреше**.
Вариацией функционала $J[y]$ **в «точке»** $y \in D$ называется главная линейная часть приращения функционала:

$$\delta J[y] = L\left[y,\ \delta y\right]. \tag{3}$$

Пример 6. 6. Пользуясь найденными в примере 6. 5 для линейных функционалов

$$J\big[\vec{y}\big] = y_1, \qquad g\big[\vec{y}\big] = y_n, \qquad h\big[\vec{y}\big] = y_1 + \ldots + y_n$$

приращениями

$$\Delta J\big[\vec{y}\big] = z_1 = \Delta y, \qquad \Delta g\big[\vec{y}\big] = z_n = \Delta y, \qquad \Delta h\big[\vec{y}\big] = \big(z_1 + \ldots + z_n\big) = \Delta y,$$

получаем, что эти приращения сами линейны по δy, следовательно вариации совпадают с приращениями:

$$\delta J\big[\vec{y}\big] = \delta y, \qquad \delta g\big[\vec{y}\big] = \delta y, \qquad \delta h\big[\vec{y}\big] = \delta y.$$

На самом деле оказывается, что *вариация любого* ***линейного функционала***

$$\delta l[y] = \Delta l[y] \equiv l\big[\delta y\big].$$

В самом деле, по свойствам линейности линейного функционала получаем:

$$\Delta l[y] \equiv l\big[y + \delta y\big] - l\big[y\big] = l\big[y\big] + l\big[\delta y\big] - l\big[y\big] = l\big[\delta y\big].$$

Замечание 6. 1. Обратим внимание, что определение вариации функционала очень похоже на определение дифференциала функции одного переменного. В действительности эта аналогия чрезвычайно глубока, и ею можно пользоваться, чтобы «угадывать» ответы ко многим задачам.

В частности, если нужно найти вариацию функционала

$$J[\varphi] = \int\limits_a^b \varphi^2(x)\, dx,$$

то можно, действуя по определению, найти приращение и выделить его линейную по δy часть:

$$\Delta J[\varphi] = \int\limits_a^b \big(\varphi(x)+\psi(x)\big)^2\,dx - \int\limits_a^b \varphi^2(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b \big(2\varphi(x)\psi(x)+\psi^2(x)\big)\,dx = \underbrace{2\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx}_{=L\left[\varphi,\,\delta\varphi\right]} + \underbrace{\int\limits_a^b \psi^2(x)\,dx}_{=\|\delta\psi\|^2=\alpha(y,\,\delta y)\,\left\|\delta y\right\|}.$$

Отсюда получаем

$$\delta J[\varphi] = L\big[\varphi,\ \delta\varphi\big] = 2\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx.$$

Однако, помня аналогию вариации с первым дифференциалом функции и тот факт, что

$$d\left(x^2\right) = 2x\,dx,$$

можно было тот же результат получить, заменяя x на φ, а dx на $\delta\varphi = \psi$.

Опр. 6. 5. Функционал J называется **дифференцируемым в «точке»** $y \in D$ **по Гатò**, если

$$\exists \ \lim_{t\to 0} \frac{J\big[y+t\delta y\big] - J\big[y\big]}{t}.$$

Вариацией функционала $J[y]$ **в «точке»** $y \in D$ называется предел:

$$\delta J[y] = \lim_{t\to 0} \frac{J\big[y+t\delta y\big] - J\big[y\big]}{t}. \tag{4}$$

Теорема 6. 1 (О связи двух определений вариации)**.**
Если существует вариация функционала в смысле определения 6. 4, то существует вариация функционала в смысле определения 6. 5, и эти вариации совпадают.

§ – 3. Необходимое условие экстремума функционала

Докажем здесь аналог теоремы Ферма о локальном экстремуме.

Теорема 6. 2 (Необходимое условие экстремума функционала).
Пусть $J[y]$ *– дифференцируемый по Гато функционал, достигающий на внутренней «точке»* $y = \varphi$ *области определения своего экстремума. Тогда* $\delta J[\varphi] = 0$.

Доказательство. Зафиксируем «точку» $y = \varphi$ и её некоторое приращение δy. Рассмотрим функцию одной переменной

$$u(t) = J\big[\varphi + t\delta y\big].$$

Очевидно, если в «точке» $y = \varphi$ функционал f достигает своего экстремума, например, максимума, то

$$\forall \ \delta y \qquad J\big[\varphi + t\delta y\big] \leqslant J\big[\varphi\big].$$

Но тогда максимума же достигает функция $u(t)$ в точке $t = 0$. По теореме Ферма отсюда следует, что

$$u'(0) = 0.$$

Учитывая определение вариации, имеем:

$$\delta J[\varphi] = \lim_{t \to 0} \frac{J\big[\varphi + t\delta y\big] - J\big[\varphi\big]}{t} \equiv \lim_{t \to 0} \frac{u(t) - u(0)}{t} = u'(0) = 0.$$

□

§ – 4. Основная лемма вариационного исчисления

Введём обозначение:

$$\overset{o}{C}\big[a,\ b\big] = \big\{ f(x) \in C\big[a,\ b\big] \ \big| \ \ f(a) = f(b) = 0 \big\}.$$

Теорема 6. 3 (Основная лемма вариационного исчисления).
Пусть $g(x) \in C\big[a,\ b\big]$ *и*

$$\forall \ f(x) \in \overset{o}{C}\big[a,\ b\big] \qquad \int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx = 0.$$

Тогда $g(x) \equiv 0$ *на* $\big[a,\ b\big]$.

Доказательство. Предположим противное: в некоторой точке $c \in \big(a,\ b\big)$ функция[1] $g(c) \neq 0$. Пусть, для определённости, $g(c) > 0$. Тогда по свойству непрерывной функции $g(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки c:

$$\exists\, \varepsilon > 0: \qquad \forall\, x \in (c-\varepsilon,\ c+\varepsilon) \subset \big(a,\ b\big) \qquad g(x) > 0.$$

Выберем $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \big[a,\ c-\varepsilon\big]; \\ \varepsilon - \big|x-c\big|, & x \in \big(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon\big); \\ 0, & x \in \big[c+\varepsilon,\ b\big]. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна на $\big[a,\ b\big]$, обращается в нуль на концах этого отрезка $\Big($т.е. принадлежит классу $\overset{o}{C}\big[a,\ b\big]\Big)$, и при этом отлична от нуля (и положительна) только на том интервале $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$, на котором положительна $g(x)$. Для так построенной функции $f(x)$

$$\int\limits_a^b \underbrace{f(x)g(x)}_{>0}\,dx > 0.$$

Но по условию теоремы, этот интеграл должен быть равен нулю. Полученное противоречие показывает, что наше предположение $g(c) \neq 0$ было неверным. □

Замечание 6.2. Основная лемма вариационного исчисления останется справедливой также и в том случае, если пространство $\overset{o}{C}\big[a,\ b\big]$ заменить на $C\big[a,\ b\big]$, $C^k\big[a,\ b\big]$ с произвольным $k \in \mathbb{N}$, $C^\infty\big[a,\ b\big]$. Можно также требовать от функций из этих классов, чтобы они удовлетворяли любым однородным краевым условиям.

§ – 5. Уравнение Эйлера–Лагранжа для интегрального функционала

Простейшей задачей вариационного исчисления является задача о нахождении функции $y(x)$, на которой достигает экстремума интегральный

[1] Точки a и b можно не рассматривать отдельно, так как если $g \neq 0$ в какой-нибудь из них, обязательно найдутся и внутренние точки $\big(a,\ b\big)$, в которых g также отлична от нуля. Это следует из её непрерывности.

функционал

$$J[y] = \int\limits_a^b F\big(x,\ y(x),\ y'(x)\big)\, dx \tag{5}$$

с областью определения

$$D(J) = \big\{ y(x) \in C\big[a,\ b\big] \ \big| \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \big\}\,. \tag{6}$$

К этой задаче сводятся такие классические задачи вариационного исчисления как задача о брахистохроне (найти кривую, по которой точка, двигающаяся под воздействием силы тяжести, пройдёт путь от точки A до точки B за кратчайшее время), задача о минимальной поверхности вращения, соединяющей заданные точки, задача о навигации (по какой траектории надо двигаться, чтобы за минимальное время достичь противоположного берега реки, и тому подобные.

Выведем условие, которому должна удовлетворять функция $y(x)$, дающая экстремум функционалу (5). По теореме 6.2 необходимым условием экстремума функционала является равенство

$$\delta J[y] = 0.$$

Найдём вариацию δJ, пользуясь определением Гато (опр. 6.5). Рассмотрим

$$J\big[y + t\delta y\big] = \int\limits_a^b F\big(x,\ y(x) + t\delta y,\ y'(x) + t\delta y'\big)\, dx$$

и продифференцируем это выражение по t, предполагая, что искомая функция и функция F достаточно гладкие, чтобы можно было дифференцировать интеграл по параметру под знаком интеграла.

$$\frac{\partial}{\partial t}\, J\big[y + t\delta y\big] = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_a^b F\big(x,\ y(x) + t\delta y,\ y'(x) + t\delta y'\big)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial t}\, F\big(x,\ y(x) + t\delta y,\ y'(x) + t\delta y'\big)\, dx = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\, \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\, \delta y' \right)\, dx. \tag{7}$$

Для краткости записи обозначим

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}.$$

Тогда полученное выражение для $\frac{\partial}{\partial t}\, J\big[y + t\delta y\big]$ запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\, J\big[y + t\delta y\big] \int\limits_a^b \big(F_y\, \delta y + F_{y'}\, \delta y'\big)\, dx.$$

Проинтегрируем последнее слагаемое по частям, перекинув производную с $\delta y'$ на $\frac{\partial F}{\partial y'}$:

$$\int\limits_a^b F_{y'}\, \delta y'\, dx = F_{y'}\, \delta y\Big|_{x=a}^{x=b} - \int\limits_a^b \frac{dF_{y'}}{dx}\, \delta y'\, dx \tag{8}$$

и учтём, что по определению вариацией δy является любая функция, не выводящая из пространства, в котором определён функционал. Так как область определения $J[y]$ имеет вид (6), то мы имеем право выбрать в качестве δy любую непрерывную функцию, обращающуюся в нуль на концах отрезка:

$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0. \tag{9}$$

Для таких δy внеинтегральное слагаемое в (8) обратится в нуль, и мы получаем

$$\int\limits_a^b F_{y'}\, \delta y'\, dx = -\int\limits_a^b \frac{dF_{y'}}{dx}\, \delta y'\, dx.$$

Тогда (7) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\, J\big[y + t\delta y\big] = \int\limits_a^b \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx}\right)\, \delta y\, dx.$$

Заметим, что в этом интеграле F зависит от аргументов $\big(x,\ y(x){+}t\delta y,\ y'(x){+}t\delta y'\big)$. По определению вариации, нам осталось подставить в полученное выражение $t = 0$, и тогда

$$\delta J[y] = \int\limits_a^b \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx}\right)\, \delta y\, dx.$$

Наконец, вспоминая необходимое условие экстремума функционала – равенство $\delta J[y] = 0$, получаем, что *функция* $y(x)$ *даёт экстремум нашему функционалу, только если*

$$\int\limits_a^b \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx}\right)\,\delta y\,dx = 0$$

при любой δy – непрерывной функции, обращающейся в нуль на концах отрезка. По основной лемме вариационного исчисления это означает, что равна нулю скобка, стоящая под интегралом:

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0. \tag{10}$$

Полученное необходимое условие (10) того, что $y(x)$ даёт экстремум функционалу (5), называется **уравнением Эйлера–Лагранжа**.

Опр. 6. 6. График функции $y = y(x)$ называется **экстремалью функционала** $J[y]$, если функция $y = y(x)$ является решением уравнения Эйлера–Лагранжа (10).

Пример 6. 7. *Найти экстремаль функционала*

$$J[\vec{y}] = \int\limits_{-1}^{1} \left(y'^2 - 12xy\right)\,dx; \qquad y(-1) = 1, \quad y(1) = 1.$$

В данном случае подынтегральная функция имеет вид

$$F\big(x,\ y(x),\ y'(x)\big) = y'^2 - 12xy.$$

Уравнение Эйлера (10) для неё выглядит так:

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \equiv -12x - \frac{d}{dx}\,(2y') = -2\big(6x + y''\big) = 0.$$

Поскольку нам даны ещё краевые условия, которым должна удовлетворять экстремаль, нам надо решить краевую задачу:

$$\begin{cases} y'' = -6x; \\ y(-1) = 1; \\ y(1) = 1. \end{cases} \tag{11}$$

Общим решением уравнения $y'' = -6x$ является семейство функций

$$y_{OO}(x) = -x^3 + c_1 x + c_2.$$

Из краевых условий получаем:

$$\begin{cases} y(-1) = 1 & \Longrightarrow\ 1 - c_1 + c_2 = 1 & \Longrightarrow\ c_2 = c_1, \\ y(1) = 1 & \Longrightarrow\ -1 + c_1 + c_2 = 1 & \Longrightarrow\ c_2 + c_1 = 2, \end{cases}$$

откуда $c_1 = c_2 = 1$, и мы получаем ответ:
экстремаль заданного функционала, удовлетворяющая таким краевым условиям, есть функция

$$y(x) = -x^3 + x + 1.$$

Литература

[1] *Демидович Б. П.* **Лекции по математической теории устойчивости**// М.: «Наука», 1967.

[2] *Камынин Л. И.* **Курс математического анализа**// М., 2001.

[3] *Понтрягин Л. С.* **Обыкновенные дифференциальные уравнения**// М., «Наука», 1974.

[4] *Филиппов А. Ф.* **Введение в теорию дифференциальных уравнений**// М., 2004.