Д/з 10 по УМФ для потока К-5

1) Методом Фурье решить задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < l, \\ u(0,y) = u_x(\pi, y) = 0, \\ u_y(x,0) = T \sin \dfrac{x}{2}, \quad u(x,l) = 0. \end{cases}$$

(№ 717.г из [БК])

При упрощении ответа рекомендуется использовать формулу

$$\operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta \operatorname{ch}\alpha = \operatorname{sh}(\alpha - \beta).$$

2) В круге $0 \leqslant r < R$ найти гармоническую функцию $u(r, \varphi)$, удовлетворяющую граничному условию

$$u(R, \varphi) = \varphi \sin \varphi.$$

(№ 719.б из [БК])

3) Найти гармоническую функцию $u(x, y)$ в кольце $1 < r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} < 3$, если

$$u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=3} = 3x.$$

(№ 721.а из [БК])

Записать ответ в декартовых координатах.

4) Найти гармоническую функцию $u(x, y)$ в кольце $1 < r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} < 2$, если

$$u|_{r=1} = 1, \quad u|_{r=2} = 2xy.$$

(№ 721.б из [БК])

Записать ответ в декартовых координатах.

Ответы:

1) $$u(x,y) = 2T \, \frac{\operatorname{sh}\dfrac{y-l}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{l}{2}} \, \sin \frac{x}{2}.$$

2) $$u(r,\varphi) = -1 - \frac{r}{2R} \cos\varphi + \frac{\pi r}{R} \sin\varphi + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1} \left(\frac{r}{R}\right)^k \cos k\varphi.$$

3) $$u(x,y) = \frac{27}{8} \, \frac{(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2} \, x.$$

4) $$u(x,y) = \frac{\ln \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}}{\ln \dfrac{1}{2}} + \frac{32}{15} \, \frac{(x^2 + y^2)^2 - 1}{(x^2 + y^2)^2} \, xy.$$