

Д/з 10 по УМФ для потока К-6

1. Найти гармоническую функцию $u = u(x, y, z)$ в шаре $r < 2$, если

$$u|_{r=2} = z^4.$$

Записать результат «как в ответе». Проверить ответ подстановкой в исходное краевое условие (потренироваться для контрольной!).

2. Законспектировать основные сведения про *функции Бесселя*. (По книге Бицадзе, Калининченко «Сборник задач по уравнениям математической физики», приложение IV «Некоторые специальные функции», пп. 2 и 4.)
3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2 «Графическое представление функций Бесселя».

I) Построить графики функций $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ на общей координатной плоскости. Взять достаточно большой промежуток $0 \leq x \leq l$. Обратить внимание на взаимное расположение нулей; на поведение функций вблизи нуля и при $x \rightarrow +\infty$. (Использовать встроенные в математический пакет функции Бесселя.)

II) Сравнить на нескольких графиках поведение встроенной функции $J_0(x)$ с частичными суммами степенного ряда

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Поэкспериментировать с малым, средним и большим количествами слагаемых. Убедиться, что есть некое «критическое» значение $x = x_0$, после которого функцию Бесселя практически нельзя восстановить при помощи степенного ряда.

III) При $x \rightarrow +\infty$ сравнить поведение встроенной функции $J_0(x)$ с частичными суммами асимптотического разложения

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! (8x)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4! (8x)^4} - \dots \right] + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left[\frac{1^2}{1! (8x)} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! (8x)^3} + \dots \right] \right\}.$$

Взять приближения:

а) $J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (одно слагаемое);

б) $J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8x} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right\}$ (два слагаемых);

в) $J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \left(1 - \frac{9}{2(8x)^2}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8x} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right\}$ (три слагаемых);

г) очень много слагаемых.

Ответ:

1. $u(r, \theta) = \frac{16}{5} P_0(\cos \theta) + \frac{16}{7} P_2(\cos \theta)r^2 + \frac{8}{35} P_4(\cos \theta)r^4$, откуда

$$u(x, y, z) = \frac{16}{5} + \frac{8}{7} (2z^2 - x^2 - y^2) + \frac{1}{35} (8z^4 - 24z^2(x^2 + y^2) + 3(x^2 + y^2)^2).$$