Д/з 11 по УМФ для потока К-5

1) Решить методом Фурье:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = t, \quad u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 1 - x. \end{cases}$$

(№ 20.14.4 из [Вл])

2) Найти гармоническую функцию $u(x,y)$ в кольце $\dfrac{1}{2} < r \equiv \sqrt{x^2+y^2} < 2$, если

$$u|_{r=\frac{1}{2}} = x^2, \quad u|_{r=2} = 0.$$

Записать ответ в декартовых координатах.

3) Пользуясь формулой общего решения $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$ решить задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 1. \end{cases}$$

4) Показать, что если функция $u = \varphi(x,t)$ есть решение уравнения $u_{tt} = u_{xx}$, то решением этого же уравнения будет функция

$$u = \varphi\left(\frac{x}{x^2-t^2}, \ \frac{t}{x^2-t^2}\right)$$

всюду, где она определена. (№ 444 из [БК]).

<u>Ответы</u>:

1) $u(x,y) = (1-x)t + \dfrac{1}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[e^{-t/2}\left(2\cos\mu_k t + \frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k t\right) - 2\right]\sin\pi k x,$

где $\mu_k \equiv \sqrt{(\pi k)^2 - \dfrac{1}{4}}$.

2) $u(x,y) = \dfrac{1}{32\ln 2}\,\ln\dfrac{4}{x^2+y^2} + \dfrac{x^2-y^2}{510}\left(\dfrac{16}{(x^2+y^2)^2} - 1\right).$

3) $u(x,t) = \sin x \cos at + t.$