Д/з 11   по УМФ для потока К-6

1. Пусть $x^2w''(x) + xw'(x) + (x^2 - \nu^2)w(x) = 0$. Полагая $w(x) = x^\alpha z(x)$, записать уравнение для функции $z(x)$. Отдельно рассмотреть случай $\alpha = \nu$.
2. Пусть $z'' + xz = 0$. Полагая $z(x) = \sqrt{x}\, w\left(\dfrac{2}{3}\, x\sqrt{x}\right)$, а затем $t = \dfrac{2}{3}\, x\sqrt{x}$, привести уравнение к некоторому уравнению Бесселя. Записать общее решение исходного уравнения через функции Бесселя.
3. Записать общее решение задачи о колебаниях круглой мембраны:

$$\begin{cases} u_{tt} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 < r < R, \qquad t > 0, \\ |u(0,t)| < \infty, & u(R,t) = 0, \\ u(r,0) = f(r), & u_t(r,0) = g(r). \end{cases} \qquad u = u(r,t) = ?$$

   Полностью провести все действия методом разделения переменных.

4. Решить следующие задачи теплопроводности в бесконечном цилиндре:

$$\text{а)} \begin{cases} u_t = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 < r < R,\ \ t > 0, \\ |u(0,t)| < \infty, & u(R,t) = 1, \\ u(r,0) = \left(\dfrac{r}{R}\right)^2; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} u_t = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + t, & 0 < r < R,\ \ t > 0, \\ |u(0,t)| < \infty, & u(R,t) = 0, \\ u(r,0) = 0. \end{cases}$$

Ответы:

1. $x^2z'' + (2\alpha + 1)xz' + (x^2 + \alpha^2 - \nu^2)z = 0$;   при $\alpha = \nu$ получаем $xz'' + (2\nu + 1)z' + xz = 0$.

2. $t^2w''(t) + tw'(t) + \left(t^2 - \dfrac{1}{9}\right)w(t) = 0,$

$$z(x) = \sqrt{x}\left(C_1J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\,x\sqrt{x}\right) + C_2J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\,x\sqrt{x}\right)\right).$$

3. $$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{\mu_k t}{R} + B_k\sin\frac{\mu_k t}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\,r\right),$$

$$A_k = \frac{2}{R^2(J_1(\mu_k))^2}\int_0^R rf(r)\,J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\,r\right)\,dr, \qquad B_k = \frac{2}{\mu_k R(J_1(\mu_k))^2}\int_0^R rg(r)\,J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\,r\right)\,dr,$$

   где μ_k — положительные корни функции $J_0(x)$.

4. а) $$u(r,t) = 1 - 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^3J_1(\mu_k)}\,e^{-(\mu_k/R)^2t}\,J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\,r\right);$$

   б) $$u(r,t) = 2R^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^3J_1(\mu_k)}\left(t + \frac{R^2}{\mu_k^2}\left(e^{-(\mu_k/R)^2t} - 1\right)\right)J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\,r\right).$$