

## Д/з 12 по УМФ для потока К-5

Найти непрерывные решения следующих задач на полупрямой:

$$1) \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x, t > 0, \\ u_x(0, t) = 5, \\ u(x, 0) = -3x, & u_t(x, 0) = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x, t > 0, \\ u_x(0, t) = \sin t, \\ u(x, 0) = \sin x, & u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$3) \text{ Вычислить значение } u|_{x=3, t=4}, \text{ если } \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x, t > 0, \\ u(0, t) = t, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = x^2 + 1. \end{cases}$$

4) Найти гармоническую функцию  $u(r, \varphi)$  в кольце  $1 < r < 3$ , если

$$u_r(1, \varphi) = \cos \varphi, \quad u(3, \varphi) = 1 + T \sin \varphi.$$

Записать ответ в полярных координатах.

5) Струна колеблется по закону:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - g, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

с постоянной величиной  $g$ . Края струны  $x = 0$  и  $x = l$  закреплены. Начальные положения и скорости точек струны равны нулю. Определить новое положение равновесия, вокруг которого происходят колебания. Найти аналитическую запись этих колебаний.

Ответы:

$$1) u(x, t) = \begin{cases} -3x, & x - t \geq 0, \\ 5x - 8t, & x - t \leq 0. \end{cases}$$

$$2) u(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & x - t \geq 0, \\ \sin t \cos x + \cos(x - t) - 1, & x - t \leq 0. \end{cases}$$

$$3) u|_{x=3, t=4} = 61, \text{ ибо } u(x, t) = \begin{cases} x^2 t + \frac{1}{3} t^3 + t, & x - t \geq 0, \\ x t^2 + \frac{1}{3} x^3 + t, & x - t \leq 0. \end{cases}$$

$$4) u(r, \varphi) = 1 + \frac{1}{10} \left( r - \frac{9}{r} \right) \cos \varphi + \frac{3}{10} T \left( r + \frac{1}{r} \right) \sin \varphi.$$

$$5) w(x) = \frac{g}{2a^2} x(x - l) \text{ — положение равновесия;}$$

$$u(x, t) = w(x) + \frac{4gl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \cos \frac{(2k-1)\pi a t}{l} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}.$$