

Д/з 1 по УМФ для потока К-6

1) Вычислить преобразование Фурье $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$ для функций

$$\text{а) } f(x) = e^{-\alpha|x|}, \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

2) Найти соотношение между параметрами $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, при котором функция

$$u(x, t) = e^{\alpha x} \cos(\beta x + \gamma t)$$

является решением уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$. Записать это решение.

3) С помощью формулы Пуассона решить задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = e^x. \end{cases}$$

4) Решить задачу Коши, записав ответ через интеграл ошибок:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad \text{где } f(x) = \begin{cases} Q, & \alpha < x < \beta, \\ 0, & x \notin (\alpha, \beta). \end{cases}$$

5) **Лабораторная работа № 1.** Положив $a^2 = 1$, представить ответ в задаче 4 графически при помощи одного из компьютерных математических пакетов¹. Изобразить решение при $t_0 = 0, t_1 = 10^{-4}, t_2 = 0.5, t_3 = 4, t_4 = 100, t_5 = 10000$ (можно заменить данные t_k своими “выразительными” моментами времени). Параметры α, β, Q подобрать самостоятельно из соображений наибольшей наглядности. Оформить работу по схеме: титульный лист; расчетные формулы; компьютерные графики. Срок выполнения лабораторной работы — 2 недели.

Ответы:

$$1) \quad \text{а) } F(\xi) = \frac{2\alpha}{\xi^2 + \alpha^2}, \quad \text{б) } F(\xi) = \frac{2i \sin \pi \xi}{\xi^2 - 1}.$$

$$2) \quad \beta = \alpha, \quad \gamma = 2\alpha^2, \quad u(x, t) = e^{\alpha x} \cos(\alpha x + 2\alpha^2 t) \quad \text{для } \forall \alpha > 0.$$

$$3) \quad u(x, t) = e^{x+t}.$$

$$4) \quad u(x, t) = \frac{Q}{2} \left(\Phi \left(\frac{x - \alpha}{2a\sqrt{t}} \right) + \Phi \left(\frac{\beta - x}{2a\sqrt{t}} \right) \right), \quad \text{где } \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau.$$

¹Рекомендуется использовать бесплатные пакеты SciLab, Maxima, Sage и им подобные.