Д/з 2   по УМФ для потока К-5

1. Привести уравнение к специальному каноническому виду и проделать упрощения:

   $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$ (№ 98 из [БК]).

   Ответ: $v_{\xi\eta} + 7v = 0$, где $u = ve^{-6\xi+\eta}$, $\xi = x$, $\eta = -2x + y$.

2. Привести уравнение к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения:

   $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0$ (№ 109 из [БК]).

   Ответ: $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} + v = 0$, где $u = ve^{-\eta}$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, $\zeta = -x - y + z$.

3. С помощью специальных канонических координат найти общее решение уравнения $u_{xx} + au_{xy} = 0$, где a — ненулевая константа. Записать общее решение в исходных координатах.

   Ответ: $u = f(ax - y) + g(y)$, где f, g — произвольные гладкие функции одной переменной.

4. Используя найденное общее решение (см. № 3), решить задачу:

   $u_{xx} + au_{xy} = 0, \quad u(0, y) = \varphi(y), \quad u_x(0, y) = \psi(y), \quad u = u(x, y) =?$

   Здесь x, y — переменные ($x \geqslant 0$, $-\infty < y < +\infty$), φ, ψ — заданные функции.

   Ответ: $u(x, y) = \varphi(y) + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{y-ax}^{y} \psi(\tau)\, d\tau.$

5. (Дополнительно, для желающих!)
   Выбрав подходящие координаты, найти общее решение уравнения:

   $u_{xy} + u_{yz} = 0.$

   Ответ: $u_{\xi\eta} = 0$, где $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = -x + z$.
   Проинтегрировав и перейдя к исходным координатам, получаем общее решение $u = f(x, z - x) + g(y, z - x)$, где f, g — произвольные гладкие функции двух переменных.