

Д/з 2 по УМФ для потока К-6

1. Вычислить косинус-преобразование Фурье $F_c(\xi) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(\xi x) dx$ для

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2. Решить задачу на полупрямой:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = \mu(t), \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Указание: $U(\xi, t) = \int_0^{\infty} u(x, t) \cos(\xi x) dx$.

3. С помощью формулы Пуассона решить задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = xe^{-x^2}. \end{cases}$$

(Сложная, но решаемая задача!!!)

ОТВЕТЫ:

1. а) $F_c(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \left(1 - \cos \frac{\pi\xi}{2}\right)$, б) $F_c(\xi) = \frac{1}{(1 - \xi^2)} \cos \frac{\pi\xi}{2}$.

2. $u(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau$.

3. $u(x, t) = x(1 + 4t)^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}$.