

Д/з 3 по УМФ для потока К-5

1. Решить методом Фурье:
$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1. \end{cases}$$

(Можно использовать формулу общего решения, полученную на семинаре.)

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} e^{-9(2m-1)^2 t} \sin(2m-1)x.$$

2. Методом Фурье записать общее решение задачи:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Ответ:
$$u(x, t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2 \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi k x}{l},$$

где $A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx.$

3. Решить методом Фурье:

а)
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < 2\pi, & t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = x(2\pi - x). \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \cos^2 x. \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 4 \sin^4 3x. \end{cases}$$

Ответы: а)
$$u(x, t) = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} e^{-a^2 m^2 t} \cos mx.$$

б)
$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-4a^2 t} \cos 2x.$$

в)
$$u(x, t) = \frac{3}{2} - 2e^{-72t} \cos 6x + \frac{1}{2} e^{-288t} \cos 12x.$$

4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.

Взяв $a^2 = 1/4$, представить ответ в задаче 3.а) графически при помощи одного из компьютерных математических пакетов¹. Изобразить решение при $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 5, t_3 = 20, t_4 = -1$. Оформить работу по схеме: титульный лист; расчетные формулы; компьютерные графики.

Срок исполнения лабораторной работы — 2 недели.

¹Рекомендуется использовать бесплатные пакеты SciLab, Maxima, Sage и им подобные.