Д/з 3   по УМФ для потока К-6

1. В шаре $r < R$ пространства $\mathbf{R}^n$ найти функцию $u = u(r)$ из соотношений:

$$\Delta u(r) = r^\alpha \quad \text{при} \quad r < R, \qquad u|_{r=R} = 0.$$

Здесь $\alpha \geq 0$ — фиксированная степень.

2. В пространстве $\mathbf{R}^3$ найти все непрерывные функции $u = u(r)$, удовлетворяющие уравнению $\Delta u(r) = \ln r$.

3. В кольце $a < r < b$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ найти функцию $u = u(r)$ из соотношений:

$$\Delta u(r) = 0 \quad \text{при} \quad a < r < b, \qquad u|_{r=a} = T, \qquad (u_r + u)|_{r=b} = U.$$

Здесь $0 < a < b < +\infty$; T, U — фиксированные константы.

4. Начальная температура однородного шара $0 \leq r \leq R$ в пространстве $\mathbf{R}^3$ равна T. Поверхность шара поддерживается при постоянной температуре P. Найти температуру шара $u = u(r,t)$ при $t > 0$.   (№ 708(а) из [БК])

Ответы:

1. $$u(r) = \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+2)}\left(r^{\alpha+2} - R^{\alpha+2}\right).$$

2. $$u(r) = \frac{r^2}{6}\left(\ln r - \frac{5}{6}\right) + C,$$ где C — произвольная константа.

3. $$u(r) = T + \frac{(U-T)\,b\ln\frac{r}{a}}{1 + b\ln\frac{b}{a}}.$$ (Привести свой ответ к указанному виду!)

4. $$u(r,t) = P + \frac{2R(T-P)}{\pi r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\, e^{-\left(\frac{\pi k a}{R}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi k}{R}r\right).$$

Указание: искать $u = u(r,t)$ из задачи
$$\begin{cases} u_t = \dfrac{a^2}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leq r < R, \quad t > 0,\\ |u(0,t)| < \infty, \quad u(R,t) = P,\\ u(r,0) = T. \end{cases}$$