

Д/з 4 по УМФ для потока К-5

1. Решить методом Фурье: 
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{5x}{2}, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{x}{2}. \end{cases} \quad (\text{№ 644 из [БК]})$$

Ответ:  $u(x, t) = 2 \sin \frac{t}{2} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{5t}{2} \sin \frac{5x}{2}.$

2. Методом Фурье записать общее решение задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Ответ:  $u(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{\pi k a}{l} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{l} t \right) \cos \frac{\pi k x}{l},$

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad B_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) dx,$$

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx, \quad B_k = \frac{2}{\pi k a} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx.$$

3. Решить методом Фурье: 
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 1. \end{cases} \quad (\text{№ 648 из [БК]})$$

Ответ:  $u(x, t) = t + \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi a t}{l} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{l}.$