Д/з 4 по УМФ для потока К-6

1. Проработать и законспектировать вывод фундаметальной формулы Грина:

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} E(y-x)\Delta u(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial E(y-x)}{\partial \nu_y}\, u(y) - E(x-y)\,\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right) dS_y.$$

2. В кольце $1 < x^2+y^2 \equiv r^2 < 9$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ найти функцию $u = u(r)$ из соотношений:

$$\Delta u(r) = \frac{1}{r}, \qquad u|_{r=1} = \alpha, \qquad u|_{r=3} = \beta.$$

   Здесь α, β — заданные константы.

3. При $n \geq 3$ в области $r > 1$ пространства $\mathbf{R}^n$ записать общее решение уравнения Пуассона $\Delta u(r) = r^{-\alpha}$ с различными $\alpha > 0$. Указать отличие в поведении решений на бесконечности в зависимости от α.
   (В случае затруднений разобрать лишь случай $n = \alpha = 3$.)

4. В шаре $0 \leq r \leq R$ пространства $\mathbf{R}^3$ решить задачу теплопроводности с постоянными источниками:

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + Q, \quad 0 \leq r < R, \quad t > 0, \\ |u(0,t)| < \infty, \quad u(R,t) = 0, \\ u(r,0) = T. \end{cases}$$

   Здесь Q, T — заданные константы. (Ср. с № 709(а) из [БК].)

<u>Ответы</u>:

1. См. конспекты лекций.

2. $u(r) = r + (\alpha - 1) + (\beta - \alpha - 2)\,\dfrac{\ln r}{\ln 3}.$

3. $\alpha > n \implies u(r) = \dfrac{1}{(\alpha-n)(\alpha-2)\,r^{\alpha-2}} + \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2$ (решения ограничены);

   $\alpha = n \implies u(r) = -\dfrac{1}{(n-2)r^{n-2}}\,\ln r + \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2$ (ограничены);

   $2 < \alpha < n \implies u(r) = -\dfrac{1}{(n-\alpha)(\alpha-2)\,r^{\alpha-2}} + \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2$ (ограничены);

   $\alpha = 2 \implies u(r) = \dfrac{1}{n-2}\,\ln r + \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2$ (растут как логарифмы);

   $\alpha < 2 \implies u(r) = \dfrac{1}{(n-\alpha)(2-\alpha)}\,r^{2-\alpha} + \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2$ (растут как степени).

4. $u(r,t) = \dfrac{Q}{6}(R^2 - r^2) + \dfrac{2R}{\pi r}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\left(T - \dfrac{QR^2}{(\pi k)^2}\right) e^{-\left(\frac{\pi k}{R}\right)^2 t}\,\sin\left(\dfrac{\pi k}{R}\,r\right).$

   <u>Указание</u>: $u(r,t) = \dfrac{v(r,t)}{r}$, затем $v(r,t) = w(r) + z(r,t)$,
   где $w(r)$ — решение вспомогательной стационарной задачи.