

Д/з 5 по УМФ для потока К-5

Методом Фурье решить следующие задачи:

$$\text{а) } \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = A(l - x); \end{cases} \quad (\text{№ 689 из [БК]})$$

$$\text{б) } \begin{cases} u_t = u_{xx} - \beta u, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{x}{2}; \end{cases} \quad (\text{№ 695 из [БК]})$$

$$\text{в) } \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = x^2 - x, \quad u_t(x, 0) = 0; \end{cases} \quad (\text{№ 20.14.1 из [Вл]})$$

$$\text{г) } \begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} - u, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 4 \sin^4 x. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ:

$$\text{а) } u(x, t) = \frac{8Al}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} e^{-\left[\frac{(2k-1)\pi}{2l}\right]^2 a^2 t} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2l} x;$$

$$\text{б) } u(x, t) = e^{-(\beta + \frac{1}{4})t} \sin \frac{x}{2};$$

$$\text{в) } u(x, t) = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \cos \left(\sqrt{(2k-1)^2 \pi^2 + 4} t \right) \sin(2k-1)\pi x;$$

$$\text{г) } u(x, t) = \frac{3}{2} \sin t - \frac{2}{3} \sin 3t \cos 2x + \frac{1}{2\sqrt{33}} \sin \sqrt{33}t \cos 4x.$$