Д/з 5 по УМФ для потока К-6

1. В пространстве $\mathbf{R}^3$ с координатами (x_1, x_2, x_3) построить функцию Грина для верхнего полупространства $x_3 > 0$.

2. Вывести формулу Пуассона для задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \qquad x = (x_1, x_2, x_3), \qquad x_3 > 0, \\ u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2). \end{cases}$$

3. В полуплоскости $y > 0$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ с координатами (x, y) решить по формуле Пуассона задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \qquad y > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases}$$

для следующих краевых функций

а) $\varphi(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$ б) $\varphi(x) = \sin 2x$; в) $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

4. Решить задачу о нагревании шара:

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \le r < R, \quad t > 0, \\ |u(0,t)| < \infty, \quad u(R,t) = t, \\ u(r, 0) = 0. \end{cases}$$

Нарисовать примерный график решения (в зависимости от r) при больших t.

<u>Ответы</u>:

1. $G(x,y) = -\dfrac{1}{4\pi|x-y|} + \dfrac{1}{4\pi|x-y^*|}$, где $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$.

2. $u(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_3}{2\pi} \displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \dfrac{\varphi(s,\tau)\, ds\, d\tau}{\left((x_1-s)^2 + (x_2-\tau)^2 + x_3^2\right)^{3/2}}$.

3. а) $u(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{2}$, б) $u(x,y) = e^{-2y}\sin 2x$, в) $u(x,y) = \dfrac{y+1}{x^2+(y+1)^2}$.

   <u>Указания</u>:

   б) использовать интеграл Лапласа $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha s}{s^2+\beta^2}\, ds = \frac{\pi}{\beta}\, e^{-\alpha\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

   в) использовать теорию вычетов.

4. $u(r,t) = t + \dfrac{1}{6}(r^2 - R^2) + \dfrac{2R^3}{\pi^3 r} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} e^{-\left(\frac{\pi k}{R}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{R}\, r\right)$.

   <u>Указание</u>: $u(r,t) = t + U(r,t)$,
   затем воспользоваться идеей последней задачи из предыдущего д/з 4.