

## Д/з 6–7 по УМФ для потока К-5

1. Методом Фурье решить следующие задачи:

$$\text{а) } \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 1, \quad u(l, t) = 5, \\ u(x, 0) = 0; \end{cases} \quad (\text{№ 698 из [БК]})$$

$$\text{б) } \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + \sin \pi x, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0; \end{cases} \quad (\text{№ 702 из [БК]})$$

$$\text{в) } \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin t, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0; \end{cases} \quad (\text{№ 666 из [БК]})$$

Ответы:

$$\text{а) } u(x, t) = \frac{4}{l} x + 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 5 - 1}{k} e^{-a^2 \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi k x}{l};$$

$$\text{б) } u(x, t) = \frac{1}{\beta + (a\pi)^2} \left[ 1 - e^{-[\beta + (a\pi)^2]t} \right] \sin \pi x;$$

$$\text{в) } u(x, t) = \frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} \left[ \sin t - \frac{2}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)}{2} t \right] \sin \frac{2k+1}{2} x.$$

2. Найти малые поперечные колебания струны  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ , с жестко закрепленными концами, если при  $t = 0$  струна находилась в покое, и точкам ее участка  $2 \leq x \leq 3$  была придана постоянная начальная скорость  $v_0 = 2$ . (№ 675(а) из [БК]).

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k - \cos(1.5k)}{k^2} \sin \frac{kt}{2} \sin \frac{kx}{2}.$$

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.

Используя ответ, полученный в предыдущей задаче, составить «мультфильм» о жизни струны под действием локального начального импульса. Самостоятельно выбрать наиболее интересные моменты времени: зарождение волны от начального импульса; движение волны к краям струны; отражение от краев; повторение ситуации после полного периода. Для получения точных графиков рекомендуется взять достаточно большое количество слагаемых в ряде Фурье.

Использовать любой компьютерный математический пакет.

Оформить по схеме лабораторной работы № 1. Срок исполнения — 2 недели.