

## Д/з 6 по УМФ для потока К-6

1. Найти объемный потенциал в пространстве  $\mathbf{R}^3$ , порожденный шаром  $0 \leq r \leq R$  с плотностью  $\rho(r) = R^2 - r^2$ .
2. Найти ньютонов потенциал в  $\mathbf{R}^3$ , порожденный шаром  $0 \leq r \leq 10$  с плотностью

$$\rho(r) = \begin{cases} 2, & 0 \leq r < 5, \\ 1, & 5 < r \leq 10. \end{cases}$$

Вычислить радиальную составляющую силы тяжести при  $r = 9$  и  $r = 11$ . Где сила тяжести будет больше? Сколько процентов от  $|F_N(11)|$  составляет  $|F_N(9)|$ ?

3. Решить задачу теплопроводности в шаре:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{t}{r} \sin \left( \frac{3\pi}{R} r \right), & 0 \leq r < R, \quad t > 0, \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, \\ u(r, 0) = 0. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ:

$$1. \quad u(r) = \begin{cases} \frac{1}{60} (10R^2 r^2 - 3r^4 - 15R^4), & 0 \leq r \leq R, \\ -\frac{2}{15} \frac{R^5}{r}, & r \geq R. \end{cases}$$

$$2. \quad u_N(r) = \begin{cases} \left( 250 - \frac{4}{3} r^2 \right) \pi, & 0 \leq r \leq 5, \\ \left( 200 + \frac{500}{3r} - \frac{2}{3} r^2 \right) \pi, & 5 \leq r \leq 10, \\ \frac{1500}{r} \pi, & 10 \leq r < \infty. \end{cases}$$

$$F_N(9) = -\frac{3416}{243} \pi, \quad F_N(11) = -\frac{1500}{121} \pi, \quad |F_N(9)| \text{ есть } 113.4\% \text{ от } |F_N(11)|.$$

$$3. \quad u(r, t) = \frac{1}{r} \left( \left( \frac{R}{3\pi} \right)^4 \left( e^{-\left( \frac{3\pi}{R} \right)^2 t} - 1 \right) + \left( \frac{R}{3\pi} \right)^2 t \right) \sin \left( \frac{3\pi}{R} r \right).$$