Д/з 7 по УМФ для потока К-6

1. Вычислить по определению и составить таблицу полиномов Лежандра
$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right], \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

2. Проверить непосредственно, что $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_2(t)P_4(t)\,dt = 0.$

3. Выразить основные полиномы $1,\ t,\ t^2,\ t^3,\ t^4$ через полиномы Лежандра.

4. Решить внутреннюю задачу Дирихле в трехмерном шаре:
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \le r < R, \\ u|_{r=R} = f(\cos\theta), & 0 \le \theta \le \pi, \\ u = u(r,\theta) = ? \end{cases}$$

5. Построить (без вычисления интегралов!) функцию $u(r,\theta)$, гармоническую в шаре радиуса R и удовлетворяющую граничному условию:

   а) $u|_{r=R} = 3 + 5\cos^2\theta$; б) $u|_{r=R} = 3\cos^3\theta - \cos\theta$. (№ 790 а), в) из [БК])

6. Повторение: выразить через интеграл ошибок следующий интеграл
$$I(\sigma,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/(4t)}\, e^{\sigma|s|}\,ds, \qquad \sigma \in \mathbf{R}, \qquad t > 0.$$

Ответы:

1. $P_0(t) \equiv 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2-1), \quad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3-3t),$
   $P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3).$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_2(t)P_4(t)\,dt = \frac{1}{8}\int_{0}^{1}(3t^2-1)\,(35t^4-30t^2+3)\,dt = \{\text{вычисления}\} = 0.$

3. $1 = P_0(t), \quad t = P_1(t), \quad t^2 = \frac{1}{3}(P_0(t) + 2P_2(t)), \quad t^3 = \frac{1}{5}(3P_1(t) + 2P_3(t)),$
   $t^4 = \frac{1}{35}(7P_0(t) + 20P_2(t) + 8P_4(t)).$

4. $\displaystyle u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n$ при $0 \le r \le R,$

   где $\displaystyle C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)P_n(t)\,dt.$

5. а) $\displaystyle u(r,\theta) = \frac{14}{3} + \frac{10}{3}\,P_2(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^2$; б) $\displaystyle u(r,\theta) = \frac{4}{5}\,P_1(\cos\theta)\,\frac{r}{R} + \frac{6}{5}\,P_3(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^3.$

6. $\displaystyle I(\sigma,t) = (1 + \Phi(\sigma\sqrt{t}\,))\,e^{\sigma^2 t},$ где $\displaystyle\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\tau^2}\,d\tau.$