

Д/з 8 по УМФ для потока К-6

1. Найти стационарную температуру $u(r, \theta)$ в шаре $r < R$, если на границе

$$u|_{r=R} = \begin{cases} A, & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \\ B, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, \end{cases}$$

где A, B — константы.

2. Записать в декартовых координатах следующие шаровые и внешаровые функции:

$$P_2(\cos \theta) r^2, \quad P_3(\cos \theta) r^3, \quad \frac{P_1(\cos \theta)}{r^2}, \quad \frac{P_2(\cos \theta)}{r^3}.$$

3. Найти гармоническую функцию $u = u(x, y, z)$ в шаре $r < R$, если $u|_{r=R} = z^3$.

4. Найти гармоническую функцию $u = u(x, y, z)$ вне шара при $r > R$, если $u|_{r=R} = z^3$.

5. Найти гармоническую функцию $u = u(x, y, z)$ в шаровом слое $1 < r < 2$, если

$$u|_{r=1} = 1, \quad u|_{r=2} = z.$$

ОТВЕТЫ:

$$1. \quad u(r, \theta) = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \sum_{k=0}^{\infty} P_{2k}(0) \frac{4k+3}{2k+2} P_{2k+1}(\cos \theta) \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1}, \quad 0 \leq r \leq R.$$

$$2. \quad P_2(\cos \theta) r^2 = \frac{1}{2} (2z^2 - x^2 - y^2), \quad P_3(\cos \theta) r^3 = \frac{1}{2} (2z^3 - 3z(x^2 + y^2)),$$

$$\frac{P_1(\cos \theta)}{r^2} = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{P_2(\cos \theta)}{r^3} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

$$3. \quad u(x, y, z) = \frac{3}{5} z(R^2 - x^2 - y^2 - z^2) + z^3 = \frac{3}{5} z(R^2 - x^2 - y^2) + \frac{2}{5} z^3.$$

$$4. \quad u(x, y, z) = \frac{3}{5} \frac{R^5 z(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{R^7 z^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}}.$$

$$5. \quad u(x, y, z) = -1 + \frac{8}{7} z + \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{8}{7} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$