

Д/з 9 по УМФ для потока К-5

1) Методом Фурье решить задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = t, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \frac{x}{\pi}. \end{cases} \quad (\text{№ 20.14.6 из [Вл]})$$

2) Методом Фурье решить задачу для уравнения Лапласа в квадрате:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0, \\ u(x, 0) = 1, \quad u(x, \pi) = x. \end{cases} \quad (\text{№ 717.6 из [БК]})$$

3) В круге $0 \leq r < R$ найти гармоническую функцию $u(r, \varphi)$, удовлетворяющую граничному условию

$$u(R, \varphi) = \varphi(2\pi - \varphi). \quad (\text{№ 719.a из [БК]})$$

4) Вне круга $0 \leq r \leq R$ (т. е. при $r > R$) найти гармоническую функцию $u(r, \varphi)$, удовлетворяющую условиям

$$u(R, \varphi) = T \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \text{величина } |u| \text{ ограничена при } r \rightarrow \infty. \quad (\text{№ 720.a из [БК]})$$

Ответы:

$$1) \quad u(x, t) = \frac{xt}{\pi} + \frac{t^3}{3\pi} \sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k^2 - 1)} \left(t - \frac{\sin(\sqrt{k^2 - 1} t)}{\sqrt{k^2 - 1}} \right) \sin kx;$$

$$2) \quad u(x, y) = \frac{(\pi - 2)}{2\pi} y + 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m + 1)^2 \operatorname{sh}(2m + 1)\pi} \cos(2m + 1)x \operatorname{sh}(2m + 1)y;$$

$$3) \quad u(r, \varphi) = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\frac{r}{R} \right)^k \cos k\varphi;$$

$$4) \quad u(r, \varphi) = \frac{2T}{\pi} - \frac{4T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \left(\frac{R}{r} \right)^k \cos k\varphi.$$