Д/з 9 по УМФ для потока К-6

1. Найти гармоническую функцию $u(x,y,z)$ при $r > R$, если $u|_{r=R} = R^2 - z^2$.
2. Решить общую внутреннюю задачу Дирихле в трехмерном шаре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \qquad 0 \le r < R, \\ u|_{r=R} = f(\theta,\varphi), \end{cases} \qquad\qquad u = u(r,\theta,\varphi) = ?$$

Полностью провести все действия методом разделения переменных.

3. Вычислить явно функции Лежандра $P_n^m(t) = (1-t^2)^{m/2}\,\dfrac{d^m}{dt^m}P_n(t)$ для

$$P_1^1(t), \quad P_2^1(t), \quad P_2^2(t), \quad P_3^1(t), \quad P_3^2(t), \quad P_3^3(t).$$

4. Вычислить шаровые функции в сферических и декартовых координатах:

$$rP_1(\cos\theta), \quad rP_1^1(\cos\theta)\cos\varphi, \quad rP_1^1(\cos\theta)\sin\varphi, \quad r^2P_2^1(\cos\theta)\sin\varphi, \quad r^3P_3^2(\cos\theta)\cos 2\varphi.$$

5. Показать, что шаровая функция $u(r,\theta,\varphi) = r^nP_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ представима в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = [r^m(\sin\theta)^m\cos m\varphi]\cdot\left[r^{n-m}\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)\right]\Bigg|_{t=\cos\theta} \equiv v(r,\theta,\varphi)\cdot w(r,\theta).$$

6. Показать, что функция $v(r,\theta,\varphi)$ из задачи 5 есть однородный полином степени m от x, y.
7. Показать, что функция $w(r,\theta)$ из задачи 5 есть однородный полином степени $(n-m)$ от x, y, z.
8. Показать, что шаровая функция из задачи 5 есть однородный полином степени n от x, y, z.

Ответы:

1. $u(x,y,z) = \dfrac{R^3}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \dfrac{R^2\,(2z^2-x^2-y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right).$

2. $u(r,\theta,\varphi) = A_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_nP_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}\left(A_n^m\cos m\varphi + B_n^m\sin m\varphi\right)P_n^m(\cos\theta)\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n,$

$$A_n = \frac{(2n+1)}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\,P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta,$$

$$A_n^m = \frac{(2n+1)}{2\pi}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\cos m\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\,P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta,$$

$$B_n^m = \frac{(2n+1)}{2\pi}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\sin m\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\,P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

3. $P_1^1(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad P_2^1(t) = 3t\sqrt{1-t^2}, \quad P_2^2(t) = 3(1-t^2),$

$P_3^1(t) = \dfrac{3}{2}\,(5t^2-1)\sqrt{1-t^2}, \quad P_3^2(t) = 15t(1-t^2), \quad P_3^3(t) = 15(1-t^2)^{3/2}.$

4. $r\cos\theta = z, \quad r\sin\theta\cos\varphi = x, \quad r\sin\theta\sin\varphi = y,$

$3r^2\cos\theta\sin\theta\sin\varphi = 3yz, \quad 15r^3\cos\theta\sin^2\theta\cos 2\varphi = 15z(x^2-y^2).$

5. Указание: использовать определение $P_n^m(t)$.

6. Указание: $v(r,\theta,\varphi) \equiv r^m(\sin\theta)^m\cos m\varphi = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m\cos m\varphi = \mathrm{Re}\,[(x+iy)^m]$ по ф-ле Муавра.

7. Указание: заметить, что $\dfrac{d^m}{dt^m}P_n(t) = \alpha\,t^{n-m} + \beta\,t^{n-m-2} + \gamma\,t^{n-m-4} + \ \dots\ ;$

затем $w(r,\theta) = \alpha\,r^{n-m}(\cos\theta)^{n-m} + \beta\,r^{n-m}(\cos\theta)^{n-m-2} + \gamma\,r^{n-m}(\cos\theta)^{n-m-4} + \ \dots\ ;$

далее отдельно рассмотреть случаи $n-m=2k$ и $n-m=2k+1$.

8. Указание: использовать результаты из задач 6 и 7.