

Примерный список задач по курсу «Введение в математический анализ»

ИМО МИФИ, 1-й семестр, 2008/2009 уч. г.

Лектор — И. В. Тихонов

При ответе на каждый вопрос должны быть сформулированы все теоретические сведения, формулы и факты, необходимые для решения задачи.

1. Понятие неявной функции и ее графика. Нарисовать на плоскости (x, y) следующие множества точек:

$$\text{а) } x^2 + y^2 = 4, \quad \text{б) } x^2 + y^2 = 4x, \quad \text{в) } x^2 + y^2 = 4x + 4y - 4.$$

2. Каноническое уравнение эллипса. Нарисовать на плоскости (x, y) следующие множества точек:

$$\text{а) } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \quad \text{б) } 2x^2 + 3y^2 = 12, \quad \text{в) } 1 \leq x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 9.$$

3. Функция $y = |x|$ и ее свойства. Построить графики:

$$y = x + |x|, \quad y = x|x|, \quad y = \frac{x}{|x|}, \quad y = \frac{x^2}{|x|}.$$

4. Нарисовать на плоскости (x, y) график уравнения $|x| + |y| = a$ с параметром $a > 0$.

5. График квадратичной функции. Построить графики:

$$y = x^2 + 2x, \quad y = |x^2 + 2x|, \quad y = x^2 + 2|x|, \quad |y| = x^2 + 2x.$$

6. Функция $y = e^x$ и ее график. Построить графики гиперболических функций $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (гиперболический косинус), $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (гиперболический синус). Доказать гиперболические тождества:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

7. Основные тригонометрические функции и их графики. Для функции $y = \sin(1/x)$, $x \neq 0$, найти точки максимумов, минимумов, нули и построить примерный график.

8. Основные тригонометрические соотношения. Построить графики $y = 2 \sin x \cos x$, $y = 2 \cos^2 x$.

9. Различные формы записи комплексного числа и их геометрический смысл. Указать на комплексной плоскости следующие множества точек:

$$M_1 = \{z : \operatorname{Re}(iz) \leq -2\}, \quad M_2 = \{z : |z + 1 + i| \leq 1\}, \quad M_3 = \{z : |z - 2| = |z + 2i|\}.$$

10. Модуль и аргумент комплексного числа. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел:

$$z_1 = \sin \frac{\pi}{7} + i \cos \frac{\pi}{7}, \quad z_2 = 1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}, \quad z_3 = \frac{1 + \cos(\pi/7) + i \sin(\pi/7)}{1 + \cos(\pi/7) - i \sin(\pi/7)}.$$

11. Формула Муавра. Вычислить $(\sqrt{3} - i)^{20}$, $(1 + i)^{50}$. Представить ответы в тригонометрической и алгебраической формах.

12. Показательная форма комплексного числа. Записать в показательной форме:

$$z_1 = 3i, \quad z_2 = (3i)^{11}, \quad z_3 = 3 + 3i, \quad z_4 = -3e^{3i}, \quad z_5 = \frac{i}{3 - 3i}.$$

13. Равные векторы, их геометрическая интерпретация. В параллелограмме $ABCD$ даны три вершины $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$. Определить координаты четвертой вершины D .

14. В пространстве даны два произвольных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых O и O_1 суть точки пересечения диагоналей. Доказать, что

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}).$$

15. Точка M есть точка пересечения медиан в треугольнике ABC . Доказать, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$. (Указание: точка M делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.)

16. Понятия коллинеарных и неколлинеарных векторов. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ — неколлинеарные векторы на плоскости. Нарисовать множество всех векторов вида $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$, где $\alpha + \beta = 1$.
17. Скалярное произведение и его свойства. С помощью скалярного произведения доказать тождество: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$. Объяснить его геометрический смысл.
18. В треугольнике ABC проведена высота BH . Выразить вектор \overrightarrow{BH} через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.
19. В треугольнике ABC проведена биссектриса BE . Выразить вектор \overrightarrow{BE} через векторы $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.
20. Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ — неколлинеарные векторы на плоскости (координаты декартовы). Доказать, что площадь параллелограмма, образованного этими векторами вычисляется по формуле $S = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$.
21. Векторное произведение и его свойства. Векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} удовлетворяют условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Доказать, что $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$.
22. Геометрический смысл смешанного произведения. При помощи смешанного произведения найти значение $d \in \mathbb{R}$, при котором точка $D(1, 2, d)$ принадлежит плоскости, проходящей через точки $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(3, 4, 5)$.
23. Показать, что координаты вектора \vec{r} относительно произвольного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ выражаются равенствами:

$$\lambda_1 = \frac{(\vec{r}, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, \quad \lambda_2 = \frac{(\vec{e}_1, \vec{r}, \vec{e}_3)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, \quad \lambda_3 = \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{r})}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}.$$

Как преобразуются эти формулы, если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют декартов базис?

24. Свойства определителя третьего порядка. Используя свойства определителя, доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

25. Общее уравнение плоскости. Составить уравнение плоскости, если заданы две симметрично расположенные относительно нее точки $M_1(a_1, b_1, c_1)$ и $M_2(a_2, b_2, c_2)$.
26. Найти объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью

$$Ax + By + Cz = D, \quad \text{где } ABCD \neq 0.$$

27. В пространстве даны два неколлинеарных вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Указать геометрическое место точек $M(x, y, z)$, определяемых уравнением:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответить на тот же вопрос, если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

28. Различные способы задания прямой в пространстве. Записать в параметрическом виде прямую, заданную общим уравнением:

$$\begin{cases} 3x - 5y + z + 5 = 0, \\ x - 2y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Найти точку пересечения этой прямой с плоскостью $x + y + z + 1 = 0$.

29. Формула расстояния от точки до плоскости. Найти расстояние между параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D = 0$ и $Ax + By + Cz + D_1 = 0$.

30. Найти расстояние между прямыми:

а) $l_1: x = 1 + t, y = 2 - t, z = t$ и $l_2: x = -t, y = 1 + t, z = -1 - t$ ($t \in \mathbb{R}$);

б) $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ и $l_2: \frac{x+1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{1}$.

В чем принципиальная разница между этими случаями?

31. В тетраэдре $ABCD$ с вершинами $A(1, 1, -1)$, $B(0, 2, 3)$, $C(-1, 0, -3)$, $D(6, -9, 0)$ из точки D на основание ABC опущена высота DH . Составить параметрическое уравнение этой высоты. Найти координаты точки H и расстояние DH .

32. В пространстве заданы прямые $l_1: x = 1 + t, y = 2 - t, z = t$ и $l_2: x = -t, y = -3 - t, z = -1 - t$ ($t \in \mathbb{R}$). Показать, что они пересекаются. Найти точку пересечения.

33. Понятие предела последовательности. Дать определения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 5, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty.$$

Привести пример последовательности на каждую из перечисленных ситуаций.

34. Понятие точки разрыва. Классификация изолированных точек разрыва. Определить характер точки разрыва у функции $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}$.

35. Дать определение производной функции в точке. Показать, что функция

$$y = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не имеет производной в точке $x = 0$.

36. Таблица производных от основных элементарных функций. Используя таблицу и правила дифференцирования вычислить производные:

$$\begin{aligned} & (x\sqrt{x})', \left(\frac{1}{x^3}\right)', \left(x\sqrt{x\sqrt{x}}\right)', \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\right)', \left(\frac{x-3}{x+1}\right)', \left(\frac{x}{x^2+1}\right)', (\sqrt{x^2+1})', \left(\frac{x}{e^x}\right)', \left(\frac{e^{2x}}{x}\right)', (e^{3x} \sin 2x)', \\ & (3^{x^2})', (\operatorname{tg}^2 x)', (\ln \cos x)', (\ln \operatorname{ctg} x)', \left(\arcsin \frac{1}{x}\right)', (\operatorname{arctg} \sqrt{x})', \left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)', (\cos(\sin(e^{\operatorname{tg} x})))', \\ & (x^{-x})', ((\sin x)^{\cos x})'. \end{aligned}$$

37. Вычислить производные и проделать все упрощения:

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}), \quad y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

38. Понятие о логарифмическом дифференцировании. Вычислить производные:

$$y = x^{x^2}, \quad y = x^{2^x}, \quad y = 2^{x^x}.$$

Какая из перечисленных функций быстрее возрастает?