Примерный список задач по курсу
«Дифференциальное и интегральное исчисление»
ИМО МИФИ, 2-й семестр, 2009/2010 уч. г.
Лектор — А. Б. Костин

При ответе на вопрос должны быть сформулированы все теоретические сведения, формулы и факты, необходимые для решения задачи. Параметры a, b, α, β, фигурирующие в задачах, будут заменены в билетах конкретными числами.

1. Указать геометрический смысл производной. На линии $y=(x-a)^2(x-b)^2$ найти все точки, в которых касательная параллельна оси Ox. Записать уравнения соответствующих касательных.
2. Записать формулу касательной к графику функции $y=f(x)$. Показать, что для гиперболы $xy=a$ площадь треугольника, образованного касательной и координатными осями, не зависит от выбора касательной. Вычислить указанную площадь. (Ограничиться случаем $x>0$, $y>0$.)
3. Показать, что касательная к окружности $x^2+y^2=R^2$ в точке $M(x_0,y_0)$ имеет уравнение:
$$x_0x+y_0y=R^2.$$
Чему равна площадь треугольника, образованного данной касательной и осями координат? (Для простоты считаем, что точка $M(x_0,y_0)$ находится в первой координатной четверти.)
4. На параболе $y=x^2$ через точки с абсциссами $x=x_1$ и $x=x_2$ проведена секущая. В какой точке параболы касательная будет параллельна указанной секущей? Записать уравнение такой касательной. Объяснить связь данной задачи с теоремой Лагранжа.
5. Дать определения для различных типов экстремумов (максимумы, минимумы; строгие, нестрогие; локальные, глобальные). Применить правило нахождения экстремумов к следующей задаче: указать положительное число, для которого разность между квадратом и кубом является положительной и максимальной. Указать максимальное значение разности.
6. Сформулировать условия монотонности функции в терминах первой производной. Найти промежутки монотонности функции $y=(ax)^{(-bx)}$ при $x>0$. (Здесь $a,b>0$ – константы).
7. Сформулировать правило нахождения экстремумов с помощью первой производной. Найти максимальное значение функции $y=(ax)^{b/x}$ при $x>0$. (Здесь $a,b>0$ – константы).
8. Сформулировать определения критической точки и локального экстремума. Привести пример непрерывно дифференцируемой функции, у которой бесконечно много критических точек, но нет ни одного локального экстремума. (Ответ обосновать.)
9. Сформулировать правило о нахождении направления выпуклости по знаку второй производной. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба для функции $f(x)=e^{-ax^2}$.
10. Дать определение вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот. Найти все асимптоты для $f_1(x)=\dfrac{2x^2+3x+4}{x}$, $f_2(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$, $f_3(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$, $f_4(x)=\dfrac{x(x+1)^2}{x^2-1}$.
11. Дать определение наклонных асимптот. Найти асимптоты функций
$$f_1(x)=x+\sqrt{x^2+a^2},\quad f_2(x)=\ln(1+e^{ax}).\quad (\text{Здесь } a>0.)$$
Построить эскизы графиков.

12. Общая схема исследования функции. Провести полное исследование и построить графики функций $y = x^2 + x^3$, $y = (x^2-1)^3$, $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $y = xe^{-x}$, $y = \ln(1+x^2)$, $y = x\ln x$, $y = x^x$. (Каждый из графиков может быть включен в отдельный экзаменационный билет.)
13. Указать возможный вид графика функции на интервале (a, b), если известно, что
    1) $y > 0,\ y' > 0,\ y'' > 0$; 2) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' > 0$; 3) $y < 0,\ y' < 0,\ y'' < 0$.
14. Сформулировать правило Лопиталя. Вычислить по правилу Лопиталя

    а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n e^{-x})$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)e^{-x} - e^{x^2}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.
15. Записать таблицу основных неопределенных интегралов. Вычислить:
$$\int (ax+b)^{10}\,dx,\quad \int e^{ax+b}\,dx,\quad \int \frac{dx}{ax+b},\quad \int \frac{dx}{(ax+b)^2},\quad \int \frac{dx}{ax^2+b}.\quad (\text{Здесь } a, b > 0.)$$
16. Записать таблицу основных неопределенных интегралов. Свести к табличному и вычислить:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2bx+c}}\,,\quad \text{где}\quad c - b^2 > 0.\qquad \left(\text{Например,}\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}\,.\right)$$
17. Сформулировать правило замены переменной в неопределенном интеграле. С помощью подходящих замен вычислить:
$$\int \frac{x\,dx}{x^4+2bx^2+c}\,,\quad \text{где}\quad c - b^2 > 0.\qquad \left(\text{Например,}\quad \int \frac{xdx}{x^4+12x^2+40}\,.\right)$$
18. Сформулировать правило интегрирования по частям в неопределенном интеграле. Вычислить:
$$\int xe^{\alpha x}\,dx,\quad \int (\alpha x+\beta)e^{-x}\,dx,\quad \int x\cos\beta x\,dx,\quad \int x^{\alpha}\ln x\,dx,\quad \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx,\quad \alpha, \beta > 0.$$
19. Сформулировать правило Ньютона–Лейбница. Вычислить интегралы:
$$\int_0^1 x(1+x)(1+x^2)\,dx,\quad \int_0^1 \sqrt{3^x}\,dx,\quad \int_0^1 \frac{dx}{x+1},\quad \int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx,\quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1},\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$
20. Сформулировать правило Ньютона–Лейбница. Вычислить интегралы:
$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx,\quad \int_0^{\pi} \sin x\,dx,\quad \int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx\quad \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx,\quad \int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx.$$
21. Сформулировать теорему о замене переменной в определенном интеграле. Вычислить с помощью тригонометрической подстановки:
$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\ .$$

22. Сформулировать теорему об интегрировании по частям в определенном интеграле. Вычислить интеграл предыдущего номера при помощи интегрирования по частям.

23. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Вычислить производную $H'(x)$ для функции:

$$H(x) = \int\limits_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, dt\ , \qquad x > 0.$$

24. Сформулировать теорему о дифференцировании интеграла по переменному пределу. Вычислить производную $H'(x)$ для функции:

$$H(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt\ .$$

    При каких ограничениях на $f(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ законна полученная формула?

25. Указать связь определенного интеграла с понятием площади. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = x^2 - 6x + 5$ и осью Ox.

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = \arcsin x$ и осью Ox при $0 \leqslant x \leqslant 1$.