Список экзаменационных вопросов по курсу
«Уравнения математической физики»
(41 вопрос на двух листах)
ф-т «К», 6-й семестр, 2010/2011 уч. г.
Лектор — И. В. Тихонов

1. Основные уравнения математической физики: Лапласа, волновое, теплопроводности. Общее линейное уравнение 2-го порядка, основные понятия с ним связанные. Формулировка теоремы о приведении к каноническому виду. Классификация уравнений 2-го порядка.

2. Доказательство теоремы о приведении к каноническому виду линейного однородного УрЧП 2-го порядка.

3. Элементы векторного анализа, производная по направлению, градиент. Формула Гаусса–Остроградского (GO). Теорема Гаусса. Формулы Грина.

4. Теплопроводность твердых тел. Закон Фурье. Вывод уравнения трехмерной теплопроводности.

5. Понятие «задачи» в математической физике. Начальные и краевые условия. Три типа классических краевых условий в теории теплопроводности. Постановка общей смешанной начально-краевой задачи. Редукция к одномерной модели. Классические краевые операторы в одномерном случае.

6. Общая схема метода Фурье на примере простейшей одномерной задачи теплопроводности с классическими краевыми условиями.

7. Задача Штурма–Лиувилля с классическими краевыми условиями для уравнения $X''(x)+\lambda X(x)=0$. Понятие спектра. Формулировка теоремы о спектре задачи Штурма–Лиувилля. Неотрицательность собственных значений. Особый случай $\lambda_0=0$.

8. Схема метода Фурье для неоднородного уравнения $u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)$ (случай однородных краевых условий).

9. Схема метода Фурье в случае неоднородных краевых условий. Общий прием по сведению задачи с неоднородными краевыми условиями к задаче с однородными краевыми условиями.

10. Схема метода Фурье в простейшей задаче с краевыми условиями 1-го рода для уравнения колебаний струны (по материалам семинаров).

11. Обоснование метода Фурье для одномерного уравнения теплопроводности: корректность полученной формулы для простейшей задачи с краевыми условиями 1-го рода.

12. Единственность решения смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности в случае произвольных классических краевых условий.

13. Принцип экстремума для одномерного уравнения теплопроводности в прямоугольнике $[l_1,l_2]\times[0,T]$.

14. Следствия принципа экстремума для одномерного уравнения теплопроводности в прямоугольнике: теоремы позитивности, единственности и устойчивости решений в смешанной начально-краевой задаче с краевыми условиями 1-го рода.

15. Корректно поставленные задачи в математической физике. Пример Адамара. Общее понятие задачи Коши.

16. Одномерное преобразование Фурье. Его элементарные свойства. Преобразование Фурье от производной. Интеграл типа Эйлера–Пуассона.

17. Задача Коши для одномерного уравнения теплопроводности. Формальное решение при помощи преобразования Фурье. Вывод формулы Пуассона.

18. Формулировка теоремы о применимости формулы Пуассона в задаче Коши для одномерного уравнения теплопроводности. Фундаментальное решение $p_a(x,t)$ и его свойства. Эффект мгновенного распространения тепла. Сохранение ограниченности решений.

19. Принцип экстремума для одномерного уравнения теплопроводности в полосе $\mathbb{R}\times[0,T]$. Теорема единственности решения для задачи Коши.

20. Свертка функций на прямой. Элементарные свойства свертки. Преобразование Фурье от свертки. Объяснение формулы Пуассона через понятие свертки.

21. Гармонические функции в $\mathbb{R}^n$. Принцип экстремума для гармонических функций.

22. Следствия принципа экстремума для гармонических функций: теоремы позитивности, единственности и устойчивости решения в задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Невозможность пренебречь даже точкой в граничном условии.

23. Применение формулы Гаусса–Остроградского (GO) в теории гармонических функций. Другое доказательство единственности решения в задаче Дирихле. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана. Неединственность решения задачи Неймана; отличие всех ее решений на константу.

24. Оператор Лапласа в сферически симметричном случае. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Элементарные свойства фундаментального решения. Физический смысл при $n=3$; ньютонов потенциал точечной массы.

25. Общая фундаментальная формула Грина. Пример: интеграл Гаусса.

26. Фундаментальная формула Грина для гармонических функций. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о среднем.

27. Функция Грина с условиями Дирихле для оператора Лапласа. Определение функции Грина. Симметричность функции Грина.

28. Вывод разрешающей формулы (через функцию Грина) в задаче Дирихле для уравнения Пуассона.

29. Функция Грина для шара. Ее различные записи.
30. Вывод формулы Пуассона для шара. Ее обоснование для гармонических функций, непрерывных вплоть до границы.
31. Следствия формулы Пуассона для гармонических функций в шаре: теорема о среднем, усиленный принцип позитивности, усиленный принцип экстремума.
32. Неравенство Харнака для гармонических функций. Теорема Лиувилля.
33. Симметричность и отрицательная определенность оператора Лапласа в ограниченной области с классическими краевыми условиями (с доказательством предварительных лемм).
34. Вещественность и неположительность собственных значений оператора Лапласа с классическими краевыми условиями. Особый случай с собственным значением $\lambda_0 = 0$.
35. Спектральная задача для оператора Лапласа в трехмерном сферически симметричном случае. Дополнительно: обосновать дифференцируемость полученных собственных функций в начале координат.
36. Уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ в полярных координатах на плоскости. Метод разделения переменных. Переход к уравнению Бесселя индекса n со спектральным параметром μ. Запись уравнения Бесселя в стандартном виде. Связь решений.
37. Запись общего решения уравнения Бесселя индекса n через функции Бесселя и Неймана (без обоснования). Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в круге $r < R$ для краевых условий первого рода.
38. Общее понятие факториала. Определение значения $\dfrac{1}{\nu!}$ при любом $\nu \in \mathbb{R}$. Основное соотношение для факториальной функции. Пример: площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.
39. Уравнение Бесселя индекса ν, его преобразования при помощи упрощающих замен. Решение уравнение Бесселя по методу Фробениуса. Функция Бесселя индекса ν.
40. Соотношение $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Общее решение уравнение Бесселя в случае нецелого индекса. Функции Неймана индекса ν. Запись общего решения в произвольном случае.
41. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя в случае произвольного индекса $\nu \in \mathbb{R}$.

Вторым пунктом в каждом билете будет простая задача на одну из следующих тем:

а) метод Фурье для одномерного уравнения теплопроводности;
б) метод Фурье для одномерного уравнения колебаний;
в) метод характеристик для уравнения колебаний на полупрямой;
г) гармонические функции в круге;
д) гармонические функции в шаре;
е) оператор Лапласа в сферически симметричном случае.

В программу экзамена включаются также некоторые практические темы, рассмотренные на семинарах:

1. Одномерное уравнение колебаний и его общее решение $u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$.
2. Задача Коши для одномерного уравнения колебаний, вывод формулы Даламбера.
3. Простые задачи для одномерного уравнения колебаний в случае полуограниченной струны.
4. Метод Фурье и его основные особенности применительно к одномерным уравнениям колебаний и теплопроводности.
5. Представление гармонических функций в полярных координатах на плоскости.
6. Простые манипуляции с оператором Лапласа в $\mathbb{R}^n$ в сферически симметричном случае.
7. Полиномы Лежандра, их свойства, запись гармонических функций в $\mathbb{R}^3$ через полиномы Лежандра.
8. Основные представления о функциях Бесселя.

По всем этим темам достаточно базовых знаний и практических навыков, полученных в объеме семинаров.

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

[1] Конспекты лекций.
[2] Конспекты семинарских занятий.
[3] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский «Уравнения математической физики».
[4] А. В. Бицадзе «Уравнения математической физики».
[5] В. А. Треногин «Методы математической физики».
[6] С. Фарлоу «Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров».
[7] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш «Специальные функции (Формулы, графики, таблицы)».