Очевидно,

$$\varphi(t)\eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

так что если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1° и 3°, то $\varphi(t)\eta(t)$ удовлетворяет всем условиям, налагаемым на функции-оригиналы.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Проверить, какие из указанных функций являются функциями-оригиналами:

а) $f(t) = b^t\eta(t), \quad b > 0, \quad b \neq 1;$ б) $f(t) = e^{(2+4i)t}\eta(t);$

в) $f(t) = \dfrac{1}{t-3}\eta(t);$ г) $f(t) = t^2\eta(t);$

д) $f(t) = \operatorname{ch}(3-i)t\,\eta(t);$ е) $f(t) = \operatorname{tg} t\,\eta(t);$

ж) $f(t) = t^t\eta(t);$ з) $f(t) = e^{-t}\cos t\,\eta(t);$

и) $f(t) = e^{t^2}\eta(t);$ к) $f(t) = e^{-t^2}\eta(t);$

л) $f(t) = \dfrac{1}{t^2+2}\eta(t);$ м) $f(t) = \eta(t) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\eta(t-k).$

В дальнейшем для сокращения записи будем, как правило, писать $f(t)$ вместо $f(t)\eta(t)$, считая, что рассматриваемые нами функции продолжены нулем для отрицательных $t$.

*Изображением функции* $f(t)$ по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt. \tag{2}$$

Тот факт, что $F(p)$ есть изображение $f(t)$, будем символически записывать так:

$$f(t) \doteq F(p).$$

*Функция $F(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.*

**Пример 2.** Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(t) = e^{2t}.$$

Решение. Для функции $f(t) = e^{2t}$ имеем $s_0 = 2$. Поэтому изображение $F(p)$ будет во всяком случае определено и аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 2$. Имеем

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{2t}e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-2)t}\,dt = \frac{1}{-(p-2)}e^{-(p-2)t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p-2} \quad (\operatorname{Re} p = s > 2).$$



Итак, $F(p) = \dfrac{1}{p-2}$. Эта функция аналитична при $\operatorname{Re} p > 2$, и, кроме того, она аналитична всюду, за исключением точки $p = 2$. Это не противоречит сформулированному выше утверждению, так как последнее *гарантирует* аналитичность $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_0$, но вовсе не утверждает, что если $\operatorname{Re} p < s_0$, то $F(p)$ всюду неаналитична. ▷

## Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

**2.** $f(t) = t$. **3.** $f(t) = \sin 3t$. **4.** $f(t) = te^t$. **5.** $f(t) = t^\alpha \quad (\alpha > -1)$.

**6.** Может ли функция $\varphi(p) = \dfrac{1}{\cos p}$ служить изображением некоторого оригинала?

*Свойства преобразования Лапласа*

**Теорема единственности.** *Преобразование Лапласа*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt$$

*единственно в том смысле, что две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, имеющие одинаковые преобразования Лапласа, совпадают во всех точках непрерывности для всех $t > 0$.*

Различные разрывные функции могут иметь одинаковое преобразование Лапласа (читателю предлагается построить пример такой функции).

**I. Свойство линейности.** *Для любых комплексных постоянных $\alpha$ и $\beta$*

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p)$$

*(здесь и всюду в дальнейшем считаем $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$).*

## Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения функций:

**7.** $1 + t$. **8.** $2\sin t - \cos t$. **9.** $t + \dfrac{1}{2}e^{-t}$.

**II. Теорема подобия.** *Для любого постоянного $\alpha > 0$*

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

## Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь теоремой подобия, найти изображения следующих функций:

**10.** $f(t) = e^{\alpha t}$. **11.** $f(t) = \sin 4t$. **12.** а) $f(t) = \cos \omega t$; б) $f(t) = \operatorname{sh} 3t$.

**13.** Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$. Найти изображение функции $f(t/a)$ $(a > 0)$ непосредственно и с помощью теоремы подобия.

Пользуясь теоремами линейности и подобия, найти изображения следующих функций:

**14.** $f(t) = \sin^2 t$. **15.** $f(t) = \sin mt \cos nt$.

**16.** $f(t) = \cos^3 t$. **17.** $f(t) = \sin mt \sin nt$.

**18.** $f(t) = \sin^4 t$. **19.** $f(t) = \cos mt \cos nt$.

**III. Дифференцирование оригинала.** *Если функции*

$$f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$$

*являются функциями-оригиналами и* $f(t) \doteqdot F(p)$, *то*

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \doteqdot p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

*где под* $f^{(k)}(0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ *понимается* $\lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$.

**Пример 3.** Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции $f(t) = \sin^2 t$.

*Решение.* Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$. Тогда

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0).$$

Но $f(0) = 0$, а $f'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \doteqdot \dfrac{2}{p^2+4}$. Следовательно, $\dfrac{2}{p^2+4} = pF(p)$, откуда

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)} \doteqdot \sin^2 t. \qquad \triangleright$$

## Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение следующих функций:

**20.** $f(t) = \cos^2 t$. **21.** $f(t) = \sin^3 t$.



**22.** $f(t) = t \sin \omega t$. **23.** $f(t) = \cos^4 t$.

**24.** $f(t) = t \cos \omega t$. **25.** $f(t) = te^t$.

**IV. Дифференцирование изображения.** *Дифференцирование изображения сводится к умножению на* $(-t)$ *оригинала*

$$F'(p) \doteqdot -tf(t)$$

*или, вообще,*

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t).$$

**Пример 4.** Найти изображение функции $f(t) = t^2e^t$.

*Решение.* Имеем $e^t \doteqdot \dfrac{1}{p-1}$. По теореме о дифференцировании изображения $\left(\dfrac{1}{p-1}\right)' \doteqdot -te^t$, откуда $\dfrac{1}{(p-1)^2} \doteqdot te^t$. Далее

$$\left(\frac{1}{(p-1)^2}\right)' \doteqdot -t(te^t) \quad \text{или} \quad \frac{2!}{(p-1)^3} \doteqdot t^2e^t. \qquad \triangleright$$

## Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

**26.** $f(t) = t^2 \cos t$. **27.** $f(t) = t(e^t + \operatorname{ch} t)$.

**28.** $f(t) = (t+1) \sin 2t$. **29.** $f(t) = t \operatorname{sh} 3t$.

**V. Интегрирование оригинала.** *Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на* $p$, *т. е. если* $f(t) \doteqdot F(p)$, *то*

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}.$$

**Пример 5.** Найти изображение функции

$$\int_0^t e^\tau\, d\tau.$$

*Решение.* Имеем $e^t \doteqdot \dfrac{1}{p-1}$. По теореме об интегрировании оригинала

$$\int_0^t e^\tau\, d\tau \doteqdot \frac{\frac{1}{p-1}}{p} = \frac{1}{p(p-1)}. \qquad \triangleright$$

## Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

**30.** $f(t)=\int\limits_0^t \sin\tau\,d\tau$. **31.** $f(t)=\int\limits_0^t (\tau+1)\cos\omega\tau\,d\tau$.

**32.** $f(t)=\int\limits_0^t \tau\,\mathrm{sh}\,2\tau\,d\tau$. **33.** $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2\omega\tau\,d\tau$.

**34.** $f(t)=\int\limits_0^t \mathrm{ch}\,\omega\tau\,d\tau$. **35.** $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau}\,d\tau$.

**VI. Интегрирование изображения.** *Если интеграл* $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp$ *сходится, то он служит изображением функции* $\dfrac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t}\doteq\int\limits_p^\infty F(p)\,dp.$$

**Пример 6.** Найти изображение функции $\dfrac{\sin t}{t}$.

*Решение.* Как известно, $\sin t\doteq\dfrac{1}{p^2+1}$. Поэтому

$$\frac{\sin t}{t}\doteq\int\limits_p^\infty\frac{dp}{p^2+1}=\operatorname{arctg}p\Big|_p^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p=\operatorname{arcctg}p$$

(для многозначных функций $\operatorname{Ln}z$, $\operatorname{Arctg}z$ и т. д. берем их главные ветви, для которых $\ln 1=0$, $\operatorname{arctg}1=\pi/4$ и т. д.). ▷

## Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

**36.** а) $\dfrac{e^t-1}{t}$; б) $\dfrac{1-e^{-t}}{t}$; в) $\dfrac{\sin^2 t}{t}$. **37.** а) $\dfrac{1-\cos t}{t}$; б) $\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$.

**38.** а) $\dfrac{e^t-1-t}{t}$; б) $\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$.



С помощью теоремы об интегрировании изображения легко вычисляются некоторые несобственные интегралы.

Пусть $f(t)\doteq F(p)$ и пусть сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty\dfrac{f(t)}{t}\,dt$. Тогда

$$\int\limits_0^\infty\frac{f(t)}{t}\,dt=\int\limits_0^\infty F(p)\,dp,\tag{3}$$

где интеграл справа можно вычислять по положительной полуоси.

**Пример 7.** Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

*Решение.* Имеем $\sin t\doteq\dfrac{1}{p^2+1}$. По формуле (3)

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt=\int\limits_0^\infty\frac{dz}{z^2+1}=\operatorname{arctg}z\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}.$$ ▷

## Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

**39.** $\int\limits_0^\infty\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt\quad(a>0,\ b>0)$. **40.** $\int\limits_0^\infty\dfrac{e^{-at}\sin at}{t}\,dt\quad(\alpha>0,\ a>0)$.

**41.** $\int\limits_0^\infty\dfrac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}\sin mt\,dt\quad(\alpha>0,\ \beta>0,\ m>0)$.

**42.** $\int\limits_0^\infty\dfrac{Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t}+Ce^{-\gamma t}+De^{-\delta t}}{t}\,dt$

$$(A+B+C+D=0,\quad\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \delta>0).$$

**43.** $\int\limits_0^\infty\dfrac{\cos at-\cos bt}{t}\,dt\quad(a>0,\ b>0)$. **44.** $\int\limits_0^\infty\dfrac{\sin at\sin bt}{t}\,dt\quad(a>0,\ b>0)$.

**VII. Теорема смещения.** *Если* $f(t)\doteq F(p)$, *то для любого комплексного* $p_0$

$$e^{p_0 t}f(t)\doteq F(p-p_0).\tag{4}$$

**Пример 8.** Найти изображение функции $f(t) = e^{-t}\cos 2t$.

*Решение.* Имеем $\cos 2t \doteq \dfrac{p}{p^2+4}$. По теореме смещения ($p_0 = -1$)

$$e^{-t}\cos 2t \doteq \frac{p+1}{(p+1)^2+4}.$$ ▷

## Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

**45.** а) $e^{2t}\sin t$; б) $e^{t}\cos nt$. **46.** $e^{-t}\cdot t^3$.

**47.** $e^{t}\operatorname{sh} t$. **48.** $te^{t}\cos t$. **49.** $e^{3t}\sin^2 t$. **50.** $e^{-\alpha t}\cos^2 \beta t$.

**VIII. Теорема запаздывания.** *Если* $f(t) \doteq F(p)$, *то для любого положительного* $\tau$

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau}F(p). \tag{5}$$

Теорему запаздывания удобно использовать при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются разными аналитическими выражениями.

**Пример 9.** Найти изображение функции

$$f(t-1) = (t-1)^2\eta(t-1).$$

*Решение.* Для функции $f(t) = t^2\eta(t)$ имеем

$$f(t) \doteq \frac{2}{p^3}.$$

По теореме запаздывания для функции $f(t-1) = (t-1)^2\eta(t-1)$ имеем

$$(t-1)^2\eta(t-1) \doteq e^{-p}\frac{2}{p^3}.$$

Здесь существенно, что ищется изображение функции $f(t-1) = (t-1)^2\eta(t-1)$, т. е. функции, равной нулю при $t < 1$.

Если рассмотреть функцию $f_1(t) = (t-1)^2\eta(t)$, то для нее имели бы $f_1(t) = (t^2 - 2t + 1)\eta(t)$ и по свойству линейности

$$(t-1)^2\eta(t) \doteq \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}.$$ ▷



## Задачи для самостоятельного решения

Найти изображение функций:

**51.** $\sin(t-b)\eta(t-b)$. **52.** $\cos^2(t-b)\eta(t-b)$. **53.** $e^{t-2}\eta(t-2)$.

**Пример 10.** Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$, заданной следующим графиком (рис. 1):

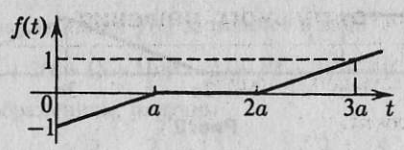



**Рис. 1**

*Решение.* Найдем аналитическое выражение для $f(t)$.

а) Для $t \in (0, a)$ функция $f(t)$ задается формулой

$$f(t) = \frac{t-a}{a}\eta(t). \tag{6}$$

б) Для $t \in (a, 2a)$ имеем $f(t) = 0$.

в) При $t \geqslant 2a$ получаем

$$f(t) = \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a). \tag{7}$$

Предполагая, что функция $f(t)$ задана формулой (6) для всех $t \geqslant 0$, выясним, какую функцию $\psi_1(t)$ надо к ней прибавить, чтобы получить функцию $f(t) = 0$ для всех $t \geqslant a$. Потребовав, чтобы при $t \geqslant a$

$$\frac{t-a}{a} + \psi_1(t) = 0,$$

найдем

$$\psi_1(t) = -\frac{t-a}{a}\eta(t-a).$$

Далее находим такую функцию $\psi_2(t)$, чтобы в сумме с $f(t) \equiv 0$ иметь функцию $\dfrac{t-2a}{a}$ для всех $t \geqslant 2a$. Это дает

$$0 + \psi_2(t) = \frac{t-2a}{a},$$

откуда

$$\psi_2(t) = \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a).$$

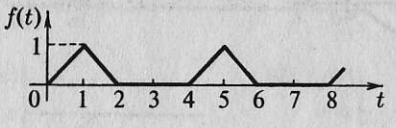
Таким образом, для всех $t \geqslant 0$ получим

$$f(t) = \frac{t-a}{a}\eta(t) - \frac{t-a}{a}\eta(t-a) + \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a).$$

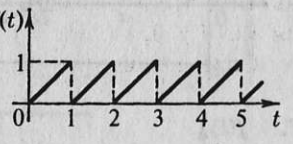
## Задачи для самостоятельного решения

Найти изображение следующих периодических функций:

**69.**

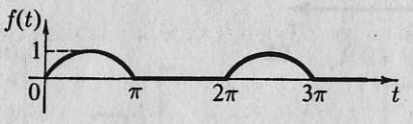



**70.**




**71.** $f(t) = |\sin t|$. **72.** $f(t) = |\cos t|$.

**73.**




$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при} \quad 2k\pi < t < (2k+1)\pi, \\ 0 & \text{при} \quad (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi, \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

**74.** Показать, что если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$f(t)\eta(t-a) \doteq F(p) - \int_0^a f(t)e^{-pt}\,dt.$$

---

В практике операционного исчисления приходится иногда сталкиваться с так называемыми обобщенными функциями[1], играющими важную роль в современной математике.

Одним из представителей обобщенных функций является функция Дирака $\delta(t)$, которая определяется так:

$$1)\ \delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t \neq 0, \\ \infty, & \text{если} \quad t = 0, \end{cases} \qquad 2)\ \int_\alpha^\beta \delta(t)f(t)\,dt = f(0),$$

где $(\alpha, \beta)$ — любой интервал, содержащий точку $t = 0$, а $f(t)$ — функция, непрерывная в точке $t = 0$.

Аналогично определяется функция $\delta(t-\tau)$, сосредоточенная в точке $t = \tau$.

В теории обобщенных функций $\delta(t)$ рассматривается как производная единичной функции $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$

$$\eta'(t) = \delta(t). \qquad (9)$$

[1] Строгое определение обобщенных функций см., например, в книге: *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.



Аналогично, при любом $\tau$

$$\eta'(t-\tau) = \delta(t-\tau).$$

Заметим, что производная функции $\eta(t)$ в обычном смысле равна нулю для всех $t \neq 0$, а при $t = 0$ не существует.

Справедливы формулы

$$\begin{aligned} &\delta(t) \doteq 1; \\ &\delta^{(m)}(t) \doteq p^m, \quad m \geqslant 0 \text{ — целое}; \\ &\delta(t-\tau) \doteq e^{-p\tau}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Рассмотрим функцию $f(t)$, имеющую разрывы первого рода в точках $t_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ со скачками

$$h_k = f(t_k + 0) - f(t_k - 0) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $f(t)$ непрерывно дифференцируема в интервалах $(t_k, t_{k+1})$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ и при $t < t_1$ и $t > t_n$. Тогда

$$f'(t) = f_1'(t) + \sum_{k=1}^{n} h_k\delta(t - t_k), \qquad (11)$$

где $f_1(t) = f(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} h_k\eta(t - t_k)$ — «сомкнутая» функция. Таким образом, производная разрывной функции $f(t)$ составляется из ее обычной производной $f_1'(t)$ (в интервалах гладкости $f(t)$) и суммы $\delta$-функций в точках разрыва с соответствующими скачками в качестве коэффициентов. Это правило важно для правильного применения теорем операционного исчисления к разрывным функциям.

Рассмотрим, например, функцию $f(t)$, определяемую так:

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

Применяя формулу (11), находим

$$f'(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2),$$

откуда согласно соотношениям (10)

$$f'(t) \doteq 1 - 2e^{-p} + e^{-2p}.$$

Далее,

$$f(t) \doteq \frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-p} + \frac{1}{p}e^{-2p},$$

что дает снова

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

Нестрогие рассуждения без учета формулы (11) привели бы к следующему. Производная $f(t)$ в обычном смысле равна нулю всюду, кроме точек $t = 0$,

# Ответы

**1.** а) да; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) нет; ж) нет; з) да; и) нет; к) да; л) да; м) да.

**2.** $\frac{1}{p^2}$. **3.** $\frac{3}{p^2+9}$. **4.** $\frac{1}{(p-1)^2}$. **5.** $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$.

**6.** Нет. **7.** $\frac{p+1}{p^2}$. **8.** $\frac{2-p}{p^2+1}$. **9.** $\frac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$.

**10.** $\frac{1}{p-a}$. **11.** $\frac{4}{p^2+16}$. **12.** а) $\frac{p}{p^2+\omega^2}$; б) $\frac{3}{p^2-9}$.

**13.** $aF(pa)$. **14.** $\frac{2}{p(p^2+4)}$. **15.** $\frac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$.

**16.** $\frac{p^3+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}$. **17.** $\frac{2mnp}{(p^2+m^2-n^2)^2-4m^2n^2}$.

**18.** $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{p}+\frac{p}{p^2+16}-\frac{4p}{p^2+1}\right)$. **19.** $\frac{p(p^2+m^2+n^2)}{(p^2+m^2-n^2)^2-4m^2n^2}$.

**20.** $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$. **21.** $\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$. **22.** $\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$.

**23.** $\frac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$. **24.** $\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$. **25.** $\frac{1}{(p-1)^2}$.

**26.** $\frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$. **27.** $\frac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}$. **28.** $\frac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}$.

**29.** $\frac{6p}{(p^2-9)^2}$. **30.** $\frac{1}{p(p^2+1)}$. **31.** $\frac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p(p^2+\omega^2)^2}$.

**32.** $\frac{4}{(p^2-4)^2}$. **33.** $\frac{p^2+2\omega^2}{p^2(p^2+4\omega^2)}$. **34.** $\frac{1}{p^2-\omega^2}$.

**35.** $\frac{2}{p(p+1)^3}$. **36.** а) $\ln\frac{p}{p-1}$; б) $\ln\frac{p+1}{p}$; в) $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}$.

**37.** а) $\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$; б) $\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+4}{p^2+1}$. **38.** а) $\ln\frac{p}{p-1}-\frac{1}{p}$; б) $\ln\frac{p+1}{p-1}$.

**39.** $\ln\frac{b}{a}$. **40.** $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{a}$. **41.** $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$.

**42.** $A\ln\frac{\delta}{\alpha}+B\ln\frac{\delta}{\beta}+C\ln\frac{\delta}{\gamma}$. **43.** $\ln\frac{b}{a}$. **44.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$.



**45.** а) $\frac{1}{(p-2)^2+1}$; б) $\frac{p-m}{(p-m)^2+n^2}$. **46.** $\frac{3!}{(p+1)^4}$. **47.** $\frac{1}{(p-1)^2-1}$.

**48.** $\frac{p^2-2p}{(p^2-2p+2)^2}$. **49.** $\frac{1}{2(p-3)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p-3}{(p-3)^2+4}$.

**50.** $\frac{1}{2(p+\alpha)}+\frac{p+\alpha}{2[(p+\alpha)^2+4\beta^2]}$. **51.** $\frac{e^{-bp}}{p^2+1}$.

**52.** $\frac{e^{-bp}}{2p}+\frac{pe^{-bp}}{2(p^2+4)}$. **53.** $\frac{e^{-2p}}{p-1}$. **54.** $\frac{1-e^{-p}}{p}$. **55.** $\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$.

**56.** $\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$. **57.** $\frac{e^{-ap}}{p+b}$. **58.** $\frac{be^{-ap}}{p(p+b)}$. **59.** $\frac{1-e^{-ap}}{p^2}$.

**60.** $\frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p^2}$. **61.** $\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{e^{kp}}$.

**62.** $F(p)=\frac{1}{ap^2}(2e^{-2ap}-1)+\frac{2}{p}e^{-ap}$. **63.** $F(p)=\frac{e^{-ap}}{p}(2-e^{-ap}-e^{-2ap})$.

**64.** $F(p)=-\frac{1}{p}+\frac{1}{ap^2}+\frac{ap-2}{ap^2}e^{-ap}+\frac{1}{ap^2}e^{-2ap}$.

**65.** $F(p)=\frac{1}{p}+\frac{1-2ap}{ap^2}e^{-ap}-\frac{1}{ap^2}e^{-2ap}$.

**66.** $F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}e^{-ap}+\frac{2}{ap^2}e^{-3ap}$.

**67.** $F(p)=-\frac{b}{p}e^{-ap}+\frac{2b}{p}e^{-2ap}$. **69.** $F(p)=\frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-4p})}$.

**70.** $\frac{1+p-e^{-p}}{p^2(e^p-1)}$. **71.** $\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}$.

**72.** $\frac{1}{p^2+1}\left(p+\frac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}}{1-e^{-\pi p}}\right)$.

**73.** $\frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}$. **77.** а) $\frac{2e^{-\frac{\pi}{8}p}}{p^2+4}$; б) $\frac{pe^{-\frac{\pi}{18}p}}{p^2+9}$; в) $\frac{3e^{-2p}}{p^2-9}$.

**78.** $\sum_{k=0}^{n}m_ke^{-kp}$. **79.** $\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$. **80.** $\frac{p}{(p-2)(p^2+1)}$.

**81.** $\frac{2}{p^2(p^2-1)}$. **82.** $\frac{n!F(p)}{p^{n+1}}$. **83.** $\frac{2}{p^3(p+2)}$.

**85.** *Решение*. Известно, что $J_1(t)=-J_0'(t)$. Используя результаты предыдущей задачи и теорему о дифференцировании оригинала, находим

$$J_1(t)\doteq -p\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}+J_0(0)=-\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}+1=\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}.$$