Найти оригиналы по заданному изображению:

103. $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4p+5}$.

104. $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

105. $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)^2}$.

106. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

107. $F(p) = \dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$.

108. $F(p) = \dfrac{1}{7-p+p^2}$.

109. $F(p) = \dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

110. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

111. $F(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

112. $F(p) = \dfrac{n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$.

113. $F(p) = \dfrac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}$.

114. $F(p) = \dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

115. $F(p) = \dfrac{p}{p^3+1}$.

116. $F(p) = \dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

117. $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

118. $F(p) = \dfrac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.

119. $F(p) = \dfrac{3p^2}{(p^3-1)^2}$.

120. $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5} + \dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

121. $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$.

122. $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

123. $F(p) = \dfrac{1}{p^2+1}(e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p})$.

124. $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2-1} + \dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

125. $F(p) = \dfrac{e^{-p/2}}{p(p+1)(p^2+4)}$.

126. $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2} + \dfrac{2e^{-2p}}{p^3} + \dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$.

127. $F(p) = \dfrac{e^{-p/3}}{p(p^2+1)}$.

Теорема Эфроса. *Пусть* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *и пусть* $\Phi(p)$ *и* $q(p)$ — *аналитические функции такие, что*

$$\Phi(p)e^{-\tau q(p)} \risingdotseq \varphi(t,\tau).$$

Тогда

$$F[q(p)]\Phi(p) \risingdotseq \int_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau.$$

В частности, если $\Phi(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p) = \sqrt{p}$, то

$$\varphi(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\tau^2/(4t)}.$$

Поэтому, если известно, что $F(p) \risingdotseq f(t)$, то по теореме Эфроса находим оригинал для $\dfrac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$:

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\tau^2/(4t)}\,d\tau. \qquad (19)$$

Задачи для самостоятельного решения

Используя теорему Эфроса, найти оригиналы следующих функций (a — вещественное число):

128. $F(p) = \dfrac{e^{-\sqrt{p}x/a}}{p}$.

129. $F(p) = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}$.

130. $F(p) = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p^2}$.

131. $F(p) = \dfrac{e^{-\sqrt{p}x/a}}{\sqrt{p}\left(\dfrac{\sqrt{p}}{a}+h\right)}$.

132. $F(p) = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p(\sqrt{p}+a)}$.

Используя теорему Эфроса, вычислить следующие интегралы:

133. $I(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{ch}\tau\, e^{-\tau^2/(4t)}\,d\tau$.

134. $I(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \cos\tau\, e^{-\tau^2/(4t)}\,d\tau$.

135. $I(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \tau\operatorname{sh}\tau\, e^{-\tau^2/(4t)}\,d\tau$.

136. $I(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \tau\sin\tau\, e^{-\tau^2/(4t)}\,d\tau$.

---

§ 2. Решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть имеем дифференциальное уравнение (для простоты — второго порядка)

$$a_0\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2x(t) = f(t), \qquad (1)$$

где a_0, a_1, $a_2 = \text{const}$, $a_0 \neq 0$, $f(t)$ — функция-оригинал.

Будем искать решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1. \tag{2}$$

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Применяя к обеим частям (1) преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа, вместо дифференциального уравнения (1) с начальными условиями (2) получаем операторное уравнение

$$(a_0p^2 + a_1p + a_2)X(p) - (a_0px_0 + a_0x_1 + a_1x_0) = F(p). \tag{3}$$

Из (3) находим

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0px_0 + a_0x_1 + a_1x_0}{a_0p^2 + a_1p + a_2}.$$

Это так называемое операторное решение. Находя по $X(p)$ оригинал $x(t)$, мы тем самым найдем функцию $x(t)$ — решение задачи Коши (1)–(2).

Общий случай решения задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка принципиально ничем не отличается от случая $n = 2$.

Схема решения задачи Коши с помощью преобразования Лапласа

Здесь L означает применение к I преобразования Лапласа, A — решение операторного уравнения II, L^{-1} — применение к III обратного преобразования Лапласа.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$x'' + x = 2\cos t; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

Решение.

$$x(t) \risingdotseq X(p), \quad x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1, \quad \cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1},$$

так что операторное уравнение имеет вид

$$p^2X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2+1};$$

отсюда

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Находим оригинал для $X(p)$. Оригинал для функции $\dfrac{1}{p^2+1}$:

$$\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t.$$

Для нахождения оригинала для функции $\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}$ воспользуемся, например, теоремой о дифференцировании изображения (см. § 14):

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2} = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'_p \risingdotseq t\sin t.$$

Значит, $X(p) \risingdotseq t\sin t - \sin t = (t-1)\sin t$.
Итак $x(t) = (t-1)\sin t$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

137. $x' + x = e^{-t}$, $\quad x(0) = 1$.
138. $x' - x = 1$, $\quad x(0) = -1$.
139. $x' + 2x = \sin t$, $\quad x(0) = 0$.
140. $x'' = 1$, $\quad x(0) = 0, \ x'(0) = 1$.
141. $x'' + x' = 1$, $\quad x(0) = 0, \ x'(0) = 1$.
142. $x'' + x = 0$, $\quad x(0) = 1, \ x'(0) = 0$.
143. $x'' + 3x' = e^t$, $\quad x(0) = 0, \ x'(0) = -1$.
144. $x'' - 2x' = e^{2t}$, $\quad x(0) = x'(0) = 0$.
145. $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$, $\quad x(0) = 0, \ x'(0) = 1$.
146. $x''' + x' = 1$, $\quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
147. $x'' + 2x' = t\sin t$, $\quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0$.
148. $x'' + 2x' + x = \sin t$, $\quad x(0) = 0, \ x'(0) = -1$.
149. $x''' - x'' = \sin t$, $\quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
150. $x''' + x' = t$, $\quad x(0) = 0, \ x'(0) = -1; \ x''(0) = 0$.
151. $x'' - 2x' + x = e^t$, $\quad x(0) = 0, \ x'(0) = 1$.
152. $x''' + 2x'' + 5x' = 0$, $\quad x(0) = -1, \ x'(0) = 2, \ x''(0) = 0$.
153. $x'' - 2x' + 2x = 1$, $\quad x(0) = x'(0) = 0$.
154. $x'' + x' = \cos t$, $\quad x(0) = 2, \ x'(0) = 0$.

155. $x'' + 2x' + x = t^2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
156. $x''' + x'' = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.
157. $x'' + x = \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.
158. $x''' + x'' = t$, $x(0) = -3$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.
159. $x'' + 2x' + 5x = 3$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
160. $x^{\mathrm{IV}} - x'' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = x'''(0) = 0$.
161. $x'' + 2x' + 2x = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$.
162. $x'' + x = 1$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.
163. $x'' + 4x = t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
164. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
165. $x''' + x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 2$.
166. $x''' + x'' = \cos t$, $x(0) = -2$, $x'(0) = x''(0) = 0$.
167. $x''' + x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.
168. $x^{\mathrm{IV}} - x'' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.
169. $x'' + x' = \cos t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.
170. $x'' - x' = te^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
171. $x''' + x' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$, $x''(0) = 0$.
172. $x'' + 2x' + x = t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
173. $x'' - x' + x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
174. $x'' - x = \sin t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.
175. $x''' + x = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.
176. $x'' + x = 2\sin t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
177. $x'' - 2x' + x = t - \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
178. $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
179. $x'' + 4x = 2\cos t \cdot \cos 3t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
180. $x'' + x = te^t + 4\sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
181. $x'' - x' = te^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
182. $x'' + x' = 4\sin^2 t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
183. $x''' - 2x'' + x' = 4$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -2$.
184. $x'' - 3x' + 2x = e^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
185. $x'' - x' = t^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
186. $x''' + x = \frac{1}{2}t^2 e^t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
187. $x'' + x = t\cos 2t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
188. $x'' + n^2 x = a\sin(nt + \alpha)$, $x(0) = x'(0) = 0$.
189. $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 1 + t + t^2$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
190. $x^{\mathrm{IV}} + 2x'' + x = t\sin t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.
191. $x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2)x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

192. $x'' + 4x = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
193. $x''' + x' = e^{2t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
194. $x^{\mathrm{IV}} + x''' = \cos t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x'''(0) = \gamma$.
195. $x'' - 4x = \sin\frac{3}{2}t \sin\frac{1}{2}t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
196. $x^{\mathrm{IV}} - 5x'' + 10x' - 6x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 6$, $x'''(0) = -14$.
197. $x'' + x' + x = te^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
198. $x'' + x = t\cos t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
199. $x''' + 3x'' - 4x = 0$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x''(0) = 2$.
200. $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
201. $x''' + x = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
202. $x'' + \omega^2 x = a[\eta(t) - \eta(t - b)]$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Требование, чтобы начальные условия были заданы в точке $t = 0$, несущественно, так как линейной заменой независимой переменной t задача Коши при $t = t_0 \neq 0$ сводится к задаче с начальными условиями в точке $t = 0$. Покажем это на примере дифференциального уравнения второго порядка.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t), \tag{4}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$, где $t_0 \neq 0$.

Положим

$$t = \tau + t_0;$$
$$x(t) = x(\tau + t_0) = \widetilde{x}(\tau);$$
$$f(t) = f(\tau + t_0) = \widetilde{f}(\tau).$$

Тогда

$$x'(t) = x'(\tau + t_0) = \widetilde{x}'(\tau),$$
$$x''(t) = x''(\tau + t_0) = \widetilde{x}''(\tau),$$

и уравнение (4) и начальные условия примут вид

$$\begin{gathered} a_0\widetilde{x}''(\tau) + a_1\widetilde{x}'(\tau) + a_2\widetilde{x}(\tau) = \widetilde{f}(\tau), \\ \widetilde{x}(0) = x_0, \quad \widetilde{x}'(0) = x_1. \end{gathered} \tag{5}$$

Мы получили задачу Коши для уравнения (5) с начальными условиями, заданными в точке $\tau = 0$.

Пример 2. Найти решение уравнения $x''(t) + x'(t) = t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

123. $\sin(t-2)\eta(t-2)+2\sin(t-3)\eta(t-3)+3\sin(t-4)\eta(t-4)$.

124. $\operatorname{sh}(t-1)\eta(t-1)+\operatorname{ch}2(t-2)\eta(t-2)$.

125. $\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{5}e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{20}\cos 2\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{10}\sin 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]$.

126. $(t-1)\eta(t-1)+(t-2)^2\eta(t-2)+(t-3)^3\eta(t-3)$.

127. $\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)-\cos\left(t-\frac{1}{3}\right)\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)$.

128. $1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$.

129. Решение. $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\sqrt{p})^2}$. Полагаем $\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$, $F(\sqrt{p})=\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\sqrt{p})^2}$. Отсюда $F(p)=\frac{e^{-ap}}{p^2}$, и по теореме запаздывания

$$F(p)\risingdotseq(t-a)\eta(t-a)=f(t).$$

По теореме Эфроса

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}\risingdotseq\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty(\tau-a)\eta(t-a)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty(\tau-a)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty\tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau-\frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=I_1(t)+I_2(t).$$

Здесь

$$I_1(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty\tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}(-2t)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big|_{\tau=a}^{\infty}=2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{a^2}{4t}},$$

$$I_2(t)=-\frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=\frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int_0^a e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau-\frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=$$

$$=a\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}}e^{-s^2}\,ds-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds\right),\quad\text{где}\quad s=\frac{\tau}{2\sqrt{t}}.$$

Следовательно, $I_2(t)=a\left[\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)-1\right]=-a\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$ и окончательно

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}\risingdotseq 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{a^2}{4t}}-a\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).$$

130. $\left(t+\frac{\alpha^2}{2}\right)\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\alpha\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$. **131.** $ae^{hx+a^2h^2t}\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)$.

132. Решение. $\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})}=\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}$. Полагаем

$$\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p}},\quad F(\sqrt{p})=\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}.$$

Отсюда

$$F(p)=-\frac{e^{-\alpha p}}{p(a+p)}=\frac{1}{a}\left(\frac{e^{-\alpha p}}{p}-\frac{e^{-\alpha p}}{p+a}\right)\risingdotseq\frac{1}{a}\left[\eta(t-\alpha)-e^{-a(t-\alpha)}\eta(t-\alpha)\right]=f(t).$$

По теореме Эфроса имеем

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}\risingdotseq\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_\alpha^\infty[1-e^{-a(\tau-\alpha)}]e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{a}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2}\,ds-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_\alpha^\infty e^{-\left(a\tau-\alpha a+\frac{\tau^2}{4t}\right)}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_\alpha^\infty e^{a\alpha+a^2t}e^{-\left(\frac{\tau}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)^2}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{e^{a(at+\alpha)}}{a}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}}^\infty e^{-z^2}\,dz,$$

где $z=\frac{\tau}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}$.

Итак,

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}\risingdotseq\frac{1}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{e^{a(at+\alpha)}}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right).$$

133. Решение. $I(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\operatorname{ch}\tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau$. Сравнивая $I(t)$ с формулой (19) § 14, видим, что $f(t)=\operatorname{ch}t$, а значит, $F(p)=\frac{p}{p^2-1}$. Следовательно, $F(\sqrt{p})=\frac{\sqrt{p}}{p-1}$. Взяв $\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$, получим $\Phi(p)F(p)=\frac{1}{p-1}\risingdotseq I(t)$, откуда $I(t)=e^t$.

134. $I(t)=e^{-t}$. **135.** $I(t)=2te^t$. **136.** $I(t)=2te^{-t}$.

137. $x(t)=(t+1)e^{-t}$. **138.** $x(t)=-1$. **139.** $x(t)=\frac{e^{-2t}-\cos t+2\sin t}{5}$.

140. $x(t)=t+\frac{1}{2}t^2$. **141.** $x(t)=t$. **142.** $x(t)=\cos t$.

143. $x(t) = \frac{1}{4}e^{t} + \frac{5}{12}e^{-3t} - \frac{2}{3}$. **144.** $x(t) = \frac{1}{4}(1 - e^{2t} + 2te^{2t})$.

145. $x(t) = \frac{1}{8}(3e^{t} - e^{-3t} - 2e^{-t})$. **146.** $x(t) = t - \sin t$.

147. $x(t) = \frac{2}{25}e^{-2t} - \frac{2}{25}\cos t + \frac{14}{25}\sin t - \frac{1}{5}t\sin t - \frac{2}{5}t\cos t$.

148. $x(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - te^{-t} - \cos t)$. **149.** $x(t) = \frac{1}{2}e^{t} - t - 1 + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$.

150. $x(t) = \frac{1}{2}t^{2} - 1 + \cos t - \sin t$. **151.** $x(t) = \frac{1}{2}t^{2}e^{t} + te^{t}$.

152. $x(t) = \frac{3}{5}e^{-t}\sin 2t - \frac{4}{5}e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{5}$.

153. $x(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{t}\cos t + e^{t}\sin t)$. **154.** $x(t) = 2 + \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t)$.

155. $x(t) = t^{2} - 4t + 6 - 5e^{-t} - te^{-t}$. **156.** $x(t) = 2t + \frac{1}{2}(e^{-t} + \cos t - \sin t)$.

157. $x(t) = \frac{1}{2}t\sin t - \cos t + \sin t$. **158.** $x(t) = \frac{1}{6}t^{3} - \frac{1}{2}t^{2} + 2t - 4 + e^{-t}$.

159. $x(t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t$. **160.** $x(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{ch} t) - t - 1$.

161. $x(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)$. **162.** $x(t) = 1 - 2\cos t$.

163. $x(t) = \frac{1}{4}t + \cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t$.

164. $x(t) = \frac{3}{25} - \frac{t}{5} - \frac{3}{25}e^{t}\cos 2t + \frac{4}{25}e^{t}\sin 2t$.

165. $x(t) = e^{-t} - e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

166. $x(t) = -1 - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t + e^{-t})$. **167.** $x(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{3}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t - 1$.

168. $x(t) = \operatorname{ch} t - \frac{1}{2}t^{2} - 1$. **169.** $x(t) = 2 + \frac{1}{2}(e^{t} + \sin t - \cos t)$.

170. $x(t) = e^{t}\left(1 - t + \frac{1}{2}t^{2}\right) - 1$. **171.** $x(t) = -\frac{3}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t$.

172. $x(t) = 2e^{-t} + te^{-t} + t - 2$. **173.** $x(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - 3\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

174. $x(t) = -\frac{1}{4}e^{t} - \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t$.

175. $x(t) = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{5}{6}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

176. $x(t) = \cos t - t\cos t$. **177.** $x(t) = 2 + t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}te^{t} - \frac{3}{2}e^{t}$.

178. $x(t) = 1 - \frac{22}{25}e^{-t} - \frac{6}{5}te^{-t} - \frac{3}{25}\cos 2t + \frac{4}{25}\sin 2t$.

179. $x(t) = \frac{t}{4}\sin 2t + \frac{1}{12}(\cos 2t - \cos 4t)$.

180. $x(t) = \frac{1}{2}(t - 1)e^{t} + \frac{1}{2}\cos t + 2\sin t - 2t\cos t$.

181. $x(t) = e^{t}\left(\frac{t^{2}}{2} - t + 1\right)$. **182.** $x(t) = 2t - 3 + 3e^{-t} - \frac{1}{5}(\sin 2t - 2\cos 2t + 2e^{-t})$.

183. $x(t) = 4t + 3 - 2e^{t}$. **184.** $x(t) = e^{2t} - e^{t} - te^{t}$.

185. $x(t) = 3e^{t} - 3 - 2t - t^{2} - \frac{t^{3}}{3}$.

186. $x(t) = \frac{1}{4}e^{t}\left(t^{2} - 3t + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3}e^{t/2}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{24}e^{-t}$.

187. $x(t) = \frac{4}{9}\sin 2t - \frac{5}{9}\sin t - \frac{1}{3}t\cos 2t$.

188. $x(t) = \frac{a}{2n^{2}}[\sin nt\cos\alpha - nt\cos(nt + \alpha)]$.

189. $x(t) = \frac{1}{6}t^{2} - \frac{4}{9}t + \frac{35}{54} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{4}{27}e^{-3t}$.

190. $x(t) = -\frac{t}{24}[3t\cos t + (t^{2} - 3)\sin t]$.

191. $x(t) = \frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t$. **192.** $x(t) = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t$.

193. $x(t) = \frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t$.

194. $x(t) = \frac{\gamma}{2}t^{2} + (1 - \gamma)t + (\gamma - 1) + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$.

195. $x(t) = \frac{83}{80}\operatorname{ch} 2t - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{16}\cos 2t$.

196. $x(t) = e^{t}\left(\cos t + \sin t - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-3t}$.

197. $x(t) = \frac{1}{3}e^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3}(t - 1)e^{t}$.

198. $x(t) = \frac{1}{4}(t^{2}\sin t + t\cos t - \sin t)$. **199.** $x(t) = \frac{2}{9}[e^{t} - e^{-2t}(3t + 1)]$.

200. $x(t) = 1 - e^{-t}\left(\frac{t^{2}}{2} + t + 1\right)$. **201.** $x(t) = 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

202. $x(t) = \frac{2a}{\omega^{2}}\left[\sin^{2}\frac{\omega t}{2}\eta(t) - \sin^{2}\frac{\omega(t - b)}{2}\eta(t - b)\right]$. **203.** $x(t) = -\cos t$.